

# **Projecção de Gauß-Krüger**

António Ferrão

RESUMO. A Projecção de GAUSS-KRÜGER é desenvolvida passo a passo com pormenor suficiente para se implementar uma rotina de cálculo em C ou PASCAL.

## Introdução

A rectificação do Meridiano Elíptico, que ocupa esta parte por inteiro, é apenas a dimensão real da projecção de GAUSS-KRÜGER. O leitor, provavelmente um curioso da Geografia como o autor, poderá surpreender-se aqui de uma forma agradável, ao descobrir que as técnicas da Análise aplicadas a este domínio são as mesmas que teve oportunidade observar noutros campos.

Lisboa, Fevereiro de 2005

António Ferrão  
antonio@ferrao.org

Desenho de funções: *gnuplot*.

Conversão de formatos gráficos: *gimp*.

Precisão múltipla: *gmp, calc, pari-gp*.

Análise de Fourier: *fftw*.

Composição Tipográfica:  $\text{\LaTeX}$ ,  $\text{\LyX}$ .



## Conteúdo

Introdução	3
Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	9
<b>Parte B. Rectificação do Meridiano</b>	<b>11</b>
Capítulo IV. Comprimento do arco elíptico	13
IV.1. Expressão geral	13
IV.2. Coeficientes binomiais generalizados	14
IV.3. Binómio de expoente $-\frac{3}{2}$	16
IV.4. Potências pares do <i>seno</i>	19
IV.5. Série de Fourier de $(1 - \epsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}}$	23
IV.6. Integração	26
IV.7. Andamento de $F(\varphi)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	28
Capítulo V. Elipsóide de Hayford 1910	33
V.1. Parâmetros fundamentais	33
V.2. Considerações sobre a precisão do cálculo	36
V.3. Série de Potências	37
V.4. Expressão no Sistema Sexagesimal	42
V.5. Compensação da Dilatação Aureolar	42
V.6. Desenvolvimento na vizinhança do Ponto Central	44
Capítulo VI. Latitude em função da distância meridiana	47
VI.1. Inversão de uma série de potências	47
VI.2. Parte Aperiódica	52
VI.3. Parte Periódica	54
Bibliografia	63
Índice	65
Apêndice A. Exemplo de programa fonte	67



## Lista de Figuras

IV.1.1	Comprimento do arco elíptico $F(\varphi)$	13
IV.2.1	Triângulo de Pascal	15
IV.3.1	$S_k(x) = \sum_{n=0}^{n=k} \binom{-\frac{3}{2}}{n} (-x)^n \quad k = 0 \dots 9, \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}}$	
	e $(1-x)^{-\frac{3}{2}} - S_k(x)$	18
IV.4.1	A identidade $\sin^2 \alpha \equiv \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$	19
IV.4.2	Sobreposição sucessiva das harmónicas de $\sin^4 \alpha$	21
IV.6.1	Arco em função da <i>latitude elipsóidica</i>	28
IV.7.1	$F(\varphi)$ no primeiro quadrante.	29
IV.7.2	Primeiras derivadas de $F(\varphi)$ nos quadrantes direitos.	31
V.2.1	Delimitação de $\Delta F(\varphi)$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$	37
VI.1.1	Funções inversas	47
VI.2.1	Incremento do Arco de Elipse em função da <i>co-latitude reduzida</i>	53
VI.2.2	Parte aperiódica	54
VI.2.3	Latitude rectificante.	55
VI.3.1	Parte periódica $\varphi - \mu$	55
VI.3.2	Primeira harmónica	56
VI.3.3	Primeiros senos	57
VI.3.4	Superfície $(\alpha, f)$ depois de aplicada a um cilindro	58
VI.3.5	Transformações de $\sin(k\alpha) \rightarrow U_k$	59



## Lista de Tabelas

IV.3.1	$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{i=0}^9 u_i \cdot x^i + o(x^{10})$	17
IV.4.2	Decomposição harmónica das primeiras potências pares do <i>seno</i>	22
IV.5.3	Produto $\mathbf{B} \times \mathbf{M}$	25
V.1.1	<i>Elipsóide de Hayford 1910</i>	33
V.1.2	<i>Elipsóide Internacional 1924</i>	33
V.1.3	$F(\varphi) = C_0\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin 2n\varphi$ [m]	34
V.1.4	$0.9996 \cdot F(\varphi)$ $\varphi = 38^\circ 00' (01') 38^\circ 59', 10D$	35
V.3.5	Produto $\mathbf{S} \times \mathbf{p}$	38
V.3.6	$(-1)^{M+1} \frac{C_n (n\varphi)^{2M+3}}{(2M+3)!} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad n = 2, 4, 6$	40
V.3.7	Primeiros quatro termos de $\mathbf{S} \times \mathbf{p}$	41
V.3.8	$F(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[\text{rad}]$	42
V.4.9	Conversão da latitude ao sistema natural	43
V.4.10	$F(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[^\circ]$	44
V.5.11	$F_{k_0=0.9996}(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[^\circ]$	45
V.6.12	<i>Ponto Central para Portugal Continental</i>	45
V.6.13	$F(\Delta\varphi) = \sum_{i=0}^7 u_i \times (\Delta\varphi)^i + o(\Delta\varphi)^8 \quad \Delta\varphi[^\circ]$	45
VI.1.1	Termos iniciais do quadrado de uma série	49
VI.1.2	Termos iniciais do cubo de uma série	51
VI.1.3	$\varphi(F) = \sum_{i=0}^{21} u_{2i+1} \times F^{2i+1} + o(F^{45}) \quad F[\text{m}]$	52
VI.3.4	$\varphi(\mu) - \mu \simeq \sum_{i=1}^6 b_i \sin 2i\mu$ [milirad]	56
VI.3.5	Polinómios de Tchebitchev de 2 <sup>a</sup> espécie	61
VI.3.6	$P(\omega)$ [rad]	62



**Parte B**

**Rectificação do Meridiano**



## CAPÍTULO IV

# Comprimento do arco elíptico

### IV.1. Expressão geral

O *raio de curvatura* da elipse em função do ângulo da normal em cada ponto com o eixo das abscissas foi obtido anteriormente, e reproduz-se aqui (a variável angular designou-se por *latitude elipsóidica*):

$$(IV.1.1) \quad M(\varphi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Resulta para comprimento do *arco elementar* da elipse:

$$(IV.1.2) \quad ds = M(\varphi) \cdot d\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

e a expressão analítica do *comprimento do arco* (Figura IV.1.1) será:

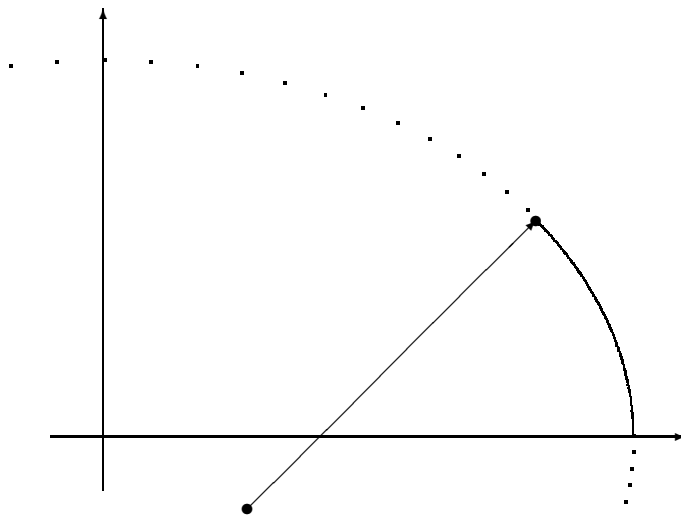


FIGURA IV.1.1. Comprimento do arco elíptico  $F(\varphi)$

$$\begin{aligned}
\text{(IV.1.3)} \quad F(\varphi) &= \int ds + C^{te} \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi} M(\chi) d\chi + F(\varphi_0) \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi + F(\varphi_0) \\
&= a(1-\varepsilon^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi} (1-\varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}} d\chi + F(\varphi_0)
\end{aligned}$$

Note-se que, para continuar a designar o limite do integral por  $\varphi$ , foi preciso introduzir uma designação diferente —  $\chi$  — para a *pseudo-variável* de integração. A constante de integração —  $F(\varphi_0)$  — pode ser escolhida arbitrariamente. A função integranda não corresponde qualquer primitiva imediata, porém a primitiva existe, e pode ser calculada com o rigor desejado. O método habitual é o de desenvolver em *série binomial* e integrá-la termo a termo.

## IV.2. Coeficientes binomiais generalizados

Seja uma função  $f(x)$  da forma  $(1+x)^m$ . Derivando sucessivamente:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\
&\dots = \dots \\
f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}
\end{aligned}$$

e substituindo as expressões das derivadas na *fórmula de MAC-LAURIN*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

notando que — qualquer que seja o expoente  $\eta$  —  $(1+x)^\eta = 1$  quando  $x = 0$ , obtém-se a chamada *série binomial*:

$$\text{(IV.2.1)} \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

que se prova ser convergente para qualquer valor de  $x$  real ou complexo situado no interior do círculo trigonométrico ( $|x| < 1$ ).

Se o expoente  $m$  do binómio for um *número inteiro não negativo*, o próprio desenvolvimento reduz-se a um *polinómio* de grau  $m$ , e os seus coeficientes são os *números combinatórios*  $C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \times n!}$  tabelados no *triângulo de Pascal* (Figura IV.2.1).

No caso geral, o desenvolvimento não tem limite de termos. Ainda assim, os coeficientes do desenvolvimento, por extensão da notação, continuam a ser representados pelo símbolo  $\binom{m}{n}$ , agora com o significado de *coeficientes binomiais*

					1																								
					1		1																						
					1		2		1																				
					1		3		3		1																		
					1		4		6		4		1																
					1		5		10		10		5		1														
					1		6		15		20		15		6		1												
					1		7		21		35		35		21		7		1										
					1		8		28		56		70		56		28		8		1								
					1		9		36		84		126		126		84		36		9		1						
					1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1				
					1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1		
					1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1

FIGURA IV.2.1. Triângulo de Pascal

*generalizados*, mas não como número de combinações:

$$(IV.2.2) \quad \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} \quad m \in \mathbb{R}$$

Com esta convenção, a potência  $m$  do binômio passa a ser representada também pelo desenvolvimento:

$$(IV.2.3) \quad (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

### IV.3. Binómio de expoente $-\frac{3}{2}$

Segue-se o cálculo dos primeiros coeficientes de IV.2.3 com o expoente que ocorre em IV.1.3:

$$\begin{aligned}
 \binom{-\frac{3}{2}}{0} &= 1 \\
 \binom{-\frac{3}{2}}{1} &= \frac{-\frac{3}{2}}{1!} \\
 &= -\frac{3}{2} \\
 \binom{-\frac{3}{2}}{2} &= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2} - 1\right)}{2!} \\
 &= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)}{2} \\
 &= \frac{+\frac{15}{4}}{2} \\
 &= \frac{15}{8} \\
 \binom{-\frac{3}{2}}{3} &= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2} - 1\right) \times \left(-\frac{3}{2} - 2\right)}{3!} \\
 &= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right)}{6} \\
 &= \frac{-\frac{105}{8}}{6} \\
 &= -\frac{35}{16}
 \end{aligned}$$

e a *Tabela IV.3.1* contém os valores dos dez primeiros coeficientes.

O desenvolvimento de  $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$  deduz-se imediatamente do anterior:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.1)} \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \frac{693}{256}x^5 + \frac{3003}{1024}x^6 + \\
 &+ \frac{6435}{2048}x^7 + \frac{109395}{32768}x^8 + \frac{230945}{65536}x^9 + o(x^{10})
 \end{aligned}$$

A convergência das somas iniciais da série IV.3.1 numa vizinhança de 0 está assinalada na *Figura IV.3.1*. Nela se pode observar que a aproximação é especialmente rápida à esquerda de 0.

Retomando agora a função integranda em IV.1.3, obtém-se de IV.3.1:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.3.2)} \quad (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \sin^2 \chi + \frac{15}{8}\varepsilon^4 \sin^4 \chi + \frac{35}{16}\varepsilon^6 \sin^6 \chi + \\
 &+ \frac{315}{128}\varepsilon^8 \sin^8 \chi + \frac{693}{256}\varepsilon^{10} \sin^{10} \chi + \frac{3003}{1024}\varepsilon^{12} \sin^{12} \chi + \\
 &+ \frac{6435}{2048}\varepsilon^{14} \sin^{14} \chi + \frac{109395}{32768}\varepsilon^{16} \sin^{16} \chi + \frac{230945}{65536}\varepsilon^{18} \sin^{18} \chi + \\
 &+ o(\varepsilon^{20})
 \end{aligned}$$

TABELA IV.3.1.  $(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{i=0}^9 u_i \cdot x^i + o(x^{10})$ 

$i$	$u_i$
0	$+\frac{1}{1} = +1$
1	$-\frac{3}{2} = -1.5$
2	$+\frac{15}{8} = +1.875$
3	$-\frac{35}{16} = -2.1875$
4	$+\frac{315}{128} = +2.4609375$
5	$-\frac{693}{256} = -2.70703125$
6	$+\frac{3003}{1024} = +2.9326171875$
7	$-\frac{6435}{2048} = -3.14208984375$
8	$+\frac{109395}{32768} = +3.338470458984375$
9	$-\frac{230945}{65536} = -3.5239410400390625$

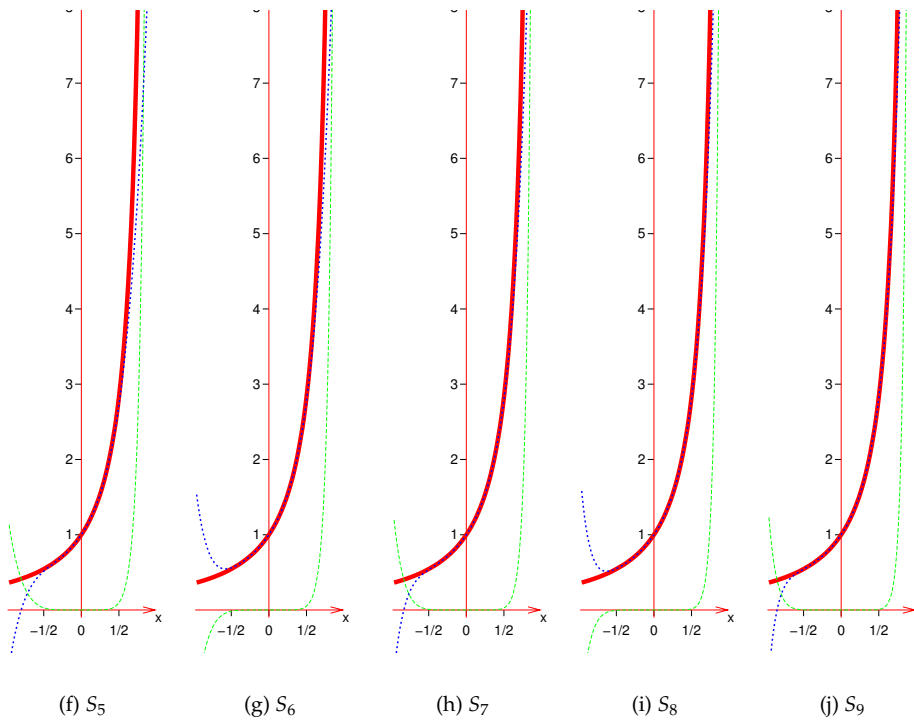
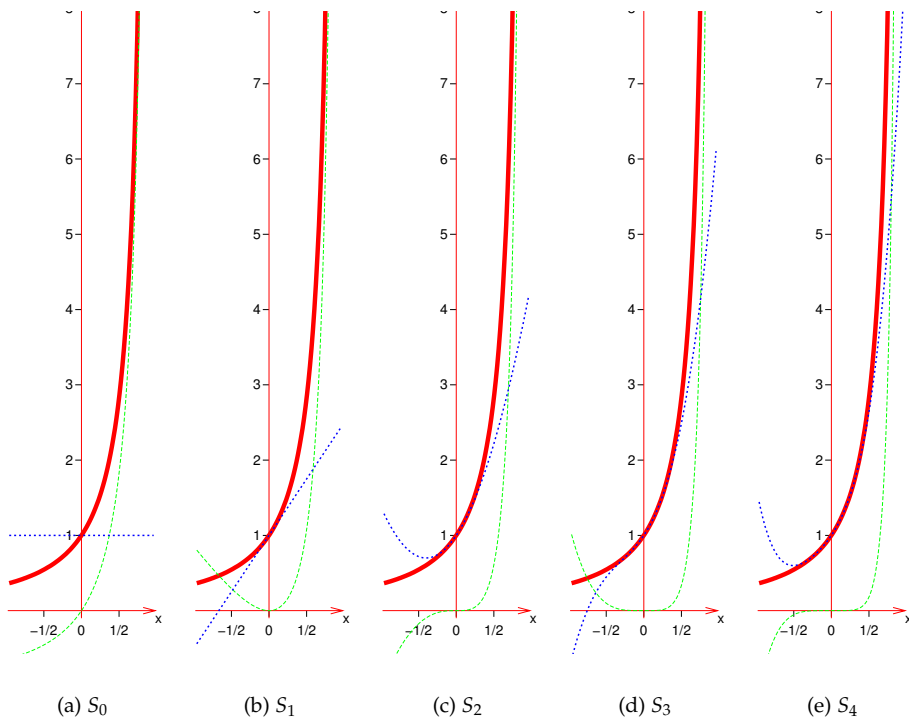
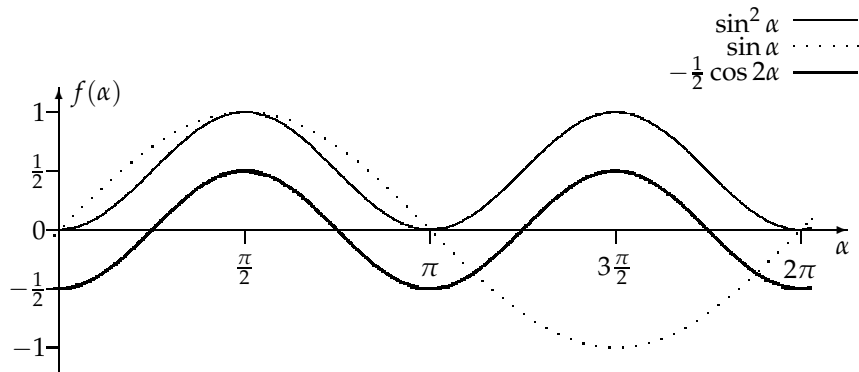


FIGURA IV.3.1.  $S_k(x) = \sum_{n=0}^{n=k} \binom{-\frac{3}{2}}{n} (-x)^n \quad k = 0 \dots 9,$   
 $(1-x)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} - S_k(x)$

FIGURA IV.4.1. A identidade  $\sin^2 \alpha \equiv \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ 

Com dez termos, o erro cometido é da ordem de  $\varepsilon^{20}$ , pois o valor absoluto do seno não excede a unidade. Quando os parâmetros da geratriz do elipsóide forem introduzidos, poder-se-á apreciar melhor a amplitude deste erro.

A última expressão faz também intervir as potências pares sucessivas do seno. Todas estas potências podem desenvolver-se em termos dos cosenos dos ângulos múltiplos de  $\chi$ .

#### IV.4. Potências pares do seno

Começando pelo cosseno da soma e da diferença de dois ângulos:

$$(IV.4.1) \quad \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ao subtrair estas duas identidades membro a membro,

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

e fazendo  $\alpha = \beta$ , obtêm-se (Figura IV.4.1):

$$(IV.4.2) \quad \begin{aligned} \cos 2\alpha - \cos 0 &= -2 \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

Por outro lado, se os dois membros de IV.4.1 forem adicionados:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

e se fizer novamente  $\alpha = \beta$ :

$$(IV.4.3) \quad \begin{aligned} \cos(2\alpha) + \cos 0 &= 2 \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

Elevando agora ao quadrado os dois membros de IV.4.2,

$$\left(\sin^2 \alpha\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right)$$

obtém-se uma expressão com o quadrado do *coseno*; usando IV.4.3 obtém-se o desenvolvimento da quarta potência (*Figura IV.4.2*):

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha &= \frac{1}{4} \left[1 - 2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{8} (2 - 4 \cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha) \\ \text{(IV.4.4)} \quad &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\alpha + 1 \cos 4\alpha) \end{aligned}$$

O facto de o *seno* ser uma *função ímpar* determina que as suas *potências pares sejam funções pares*: nada a estranhar que nos desenvolvimentos apenas apareçam termos em *coseno*. Para a determinação da sexta potência usar-se-á uma abordagem diferente.

Partindo da *fórmula de EULER* (com  $i = \sqrt{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \text{(IV.4.5)} \quad e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

e adicionando membro a membro, obtém-se:

$$\text{(IV.4.6)} \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

e ainda, subtraindo membro a membro:

$$\text{(IV.4.7)} \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

Desta última *forma exponencial* do *seno* podem deduzir-se as potências pares:

$$\begin{aligned} 2i \sin x &= e^{ix} - e^{-ix} \\ (2i \sin x)^6 &= (e^{ix} - e^{-ix})^6 \\ 2^6 i^6 \sin^6 x &= \binom{6}{0} (e^{ix})^6 - \binom{6}{1} (e^{ix})^5 (e^{-ix}) + \binom{6}{2} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^2 \\ &\quad - \binom{6}{3} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^3 + \binom{6}{4} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^4 - \binom{6}{5} (e^{ix}) (e^{-ix})^5 \\ &\quad + \binom{6}{6} (e^{-ix})^6 \end{aligned}$$

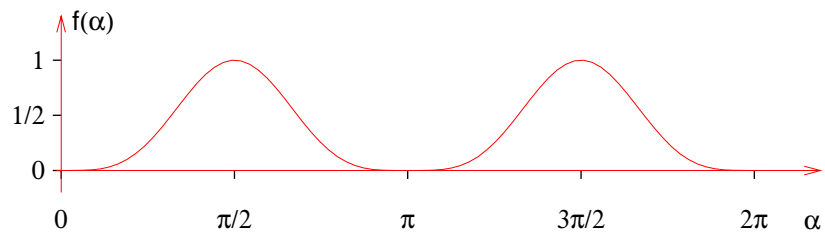
Ao desenvolver o binómio do segundo membro, apelámos ao *Triângulo de Pascal* (*Figura IV.2.1*). Os elementos dispõem-se simetricamente com respeito ao índice inferior, o que sugere o seguinte agrupamentos dos termos da última igualdade:

$$2^6 (-1) \sin^6 x = 1 \left(e^{i6x} + e^{-i6x}\right) - 6 \left(e^{i4x} + e^{-i4x}\right) + 15 \left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) - 20$$

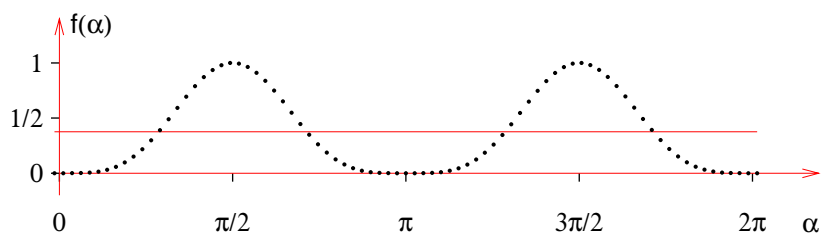
Recorrendo agora a IV.4.6:

$$\begin{aligned} -2^6 \sin^6 x &= 2 \cos 6x - 6 \times 2 \cos 4x + 15 \times 2 \cos 2x - 20 \\ \sin^6 x &= \frac{1}{2^5} (10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - 1 \cos 6x) \end{aligned}$$

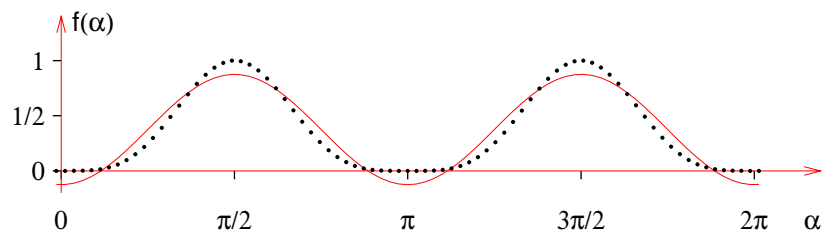
Repare-se que o expoente de 2 no denominador é uma unidade inferior ao expoente do *seno*. Além disso, o termo independente é metade do elemento central da linha correspondente do *Triângulo de Pascal*.



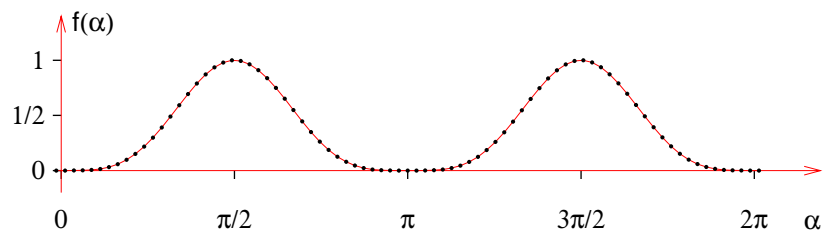
$$(a) f(\alpha) = \sin^4 \alpha$$



$$(b) f(\alpha) = \frac{3}{8}$$



$$(c) f(\alpha) = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha)$$



$$(d) f(\alpha) = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + 1 \cos 4\alpha)$$

FIGURA IV.4.2. Sobreposição sucessiva das harmônicas de  $\sin^4 \alpha$

O método usado no cálculo da sexta potência permite usar o *Triângulo de Pascal* para se obter também as potências superiores. Os resultados resumem-se na expressão matricial da *Tabela IV.4.2*. Esta é uma representação ordenada de uma série

TABELA IV.4.2. Decomposição harmónica das primeiras potências pares do seno

$\sin^0 x$	$\frac{1}{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos 0x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos 2x$
$\sin^4 x$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	0	0	$\cos 4x$
$\sin^6 x$	$\frac{10}{32}$	$-\frac{15}{32}$	$\frac{6}{32}$	$-\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	$\cos 6x$
$\sin^8 x$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{56}{128}$	$\frac{28}{128}$	$-\frac{8}{128}$	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	0	$\cos 8x$
$\sin^{10} x$	$\frac{126}{512}$	$-\frac{210}{512}$	$\frac{120}{512}$	$-\frac{45}{512}$	$\frac{10}{512}$	$-\frac{1}{512}$	0	0	0	0	$\cos 10x$
$\sin^{12} x$	$\frac{462}{2048}$	$-\frac{792}{2048}$	$\frac{495}{2048}$	$-\frac{220}{2048}$	$\frac{66}{2048}$	$-\frac{12}{2048}$	$\frac{1}{2048}$	0	0	0	$\cos 12x$
$\sin^{14} x$	$\frac{1716}{8192}$	$-\frac{3003}{8192}$	$\frac{2002}{8192}$	$-\frac{1001}{8192}$	$\frac{364}{8192}$	$-\frac{91}{8192}$	$\frac{14}{8192}$	$-\frac{1}{8192}$	0	0	$\cos 14x$
$\sin^{16} x$	$\frac{6435}{32768}$	$-\frac{11440}{32768}$	$\frac{8008}{32768}$	$-\frac{4368}{32768}$	$\frac{1820}{32768}$	$-\frac{560}{32768}$	$\frac{120}{32768}$	$-\frac{16}{32768}$	$\frac{1}{32768}$	0	$\cos 16x$
$\sin^{18} x$	$\frac{24310}{131072}$	$-\frac{43758}{131072}$	$\frac{31824}{131072}$	$-\frac{18564}{131072}$	$\frac{8568}{131072}$	$-\frac{3060}{131072}$	$\frac{816}{131072}$	$-\frac{153}{131072}$	$\frac{18}{131072}$	$-\frac{1}{131072}$	$\cos 18x$

de identidades que podem ser sintetizadas na forma:

$$(IV.4.8) \quad \sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[ \frac{\binom{2n}{n}}{2} \cos 0x + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{2n}{n+i} \cos 2ix \right]$$

As identidades IV.4.8 são *decomposições harmônicas* de funções periódicas; neste caso uma potência par do *seno*. A função integranda IV.3.1 é uma combinação linear de potências pares do *seno* e, por outro lado, cada uma destas potências é uma combinação linear de funções puramente sinusoidais - *cosenos*. Torna-se possível determinar o desenvolvimento harmônico da própria função integranda.

#### IV.5. Série de Fourier de $(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}}$

Convém para o que se segue converter à notação matricial também a igualdade IV.3.2:

$$(IV.5.1) \quad (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} \varepsilon^0 \\ \frac{3}{2} \varepsilon^2 \\ \frac{15}{8} \varepsilon^4 \\ \frac{35}{16} \varepsilon^6 \\ \frac{315}{128} \varepsilon^8 \\ \frac{693}{256} \varepsilon^{10} \\ \frac{3003}{1024} \varepsilon^{12} \\ \frac{6435}{2048} \varepsilon^{14} \\ \frac{109395}{32768} \varepsilon^{16} \\ \frac{230945}{65536} \varepsilon^{18} \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} \sin^0 \chi \\ \sin^2 \chi \\ \sin^4 \chi \\ \sin^6 \chi \\ \sin^8 \chi \\ \sin^{10} \chi \\ \sin^{12} \chi \\ \sin^{14} \chi \\ \sin^{16} \chi \\ \sin^{18} \chi \end{pmatrix} + o(\varepsilon^{20})$$

No segundo membro de IV.5.1, o primeiro factor é uma matriz  $\mathbf{A}$  – constante para cada elipse – e o segundo factor é outra matriz  $\mathbf{f}$  que depende de  $\chi$ :

$$(IV.5.2) \quad (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}} = \mathbf{A} \times \mathbf{f}(\chi) + o(\varepsilon^{20})$$

A matriz linha  $\mathbf{A}$  pode ainda ser decomposta:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1}\varepsilon^0 \\ \frac{3}{2}\varepsilon^2 \\ \frac{15}{8}\varepsilon^4 \\ \frac{35}{16}\varepsilon^6 \\ \frac{315}{128}\varepsilon^8 \\ \frac{693}{256}\varepsilon^{10} \\ \frac{3003}{1024}\varepsilon^{12} \\ \frac{6435}{2048}\varepsilon^{14} \\ \frac{109395}{32768}\varepsilon^{16} \\ \frac{230945}{65536}\varepsilon^{18} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^6 \\ \varepsilon^8 \\ \varepsilon^{10} \\ \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{14} \\ \varepsilon^{16} \\ \varepsilon^{18} \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{35}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{315}{128} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{693}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3003}{1024} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6435}{2048} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{109395}{32768} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{230945}{65536} \end{pmatrix}$$

Seja então  $\mathbf{A} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , em que  $\mathbf{E}$  é uma matriz linha contendo as sucessivas potências da excentricidade e  $\mathbf{B}$  é uma matriz diagonal contendo os valores numéricos dos coeficientes binomiais. A equação IV.5.2 pode ser reescrita:

$$(IV.5.3) \quad \left(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi\right)^{-\frac{3}{2}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{f}(\chi) + o(\varepsilon^{20})$$

Por outro lado, também a expressão da *Tabela IV.4.2* pode ser apresentada na forma:

$$(IV.5.4) \quad \mathbf{f}(\chi) = \mathbf{M} \times \mathbf{g}(\chi)$$

em que  $\mathbf{M}$  é a matriz que contem os *coeficientes harmônicos*, e  $\mathbf{g}(\chi)$  é a matriz coluna com as sucessivas *funções de base sinusoidais*. Substituindo  $\mathbf{f}(\chi)$  em IV.5.3, obtém-se:

$$(IV.5.5) \quad \left(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi\right)^{-\frac{3}{2}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{g}(\chi) + o(\varepsilon^{20})$$

Só o último factor matricial contém a variável muda de integração  $\chi$ . O primeiro factor exprime a dependência da excentricidade da elipse  $\varepsilon$ . O produto  $\mathbf{B} \times \mathbf{M}$  está determinado na *Tabela IV.5.3* e é comum a todas as elipses.

TABELA IV.5.3. Produto  $\mathbf{B} \times \mathbf{M}$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{45}{64}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{15}{64}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{175}{256}$	$-\frac{525}{512}$	$\frac{105}{256}$	$-\frac{35}{512}$	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{11025}{16384}$	$-\frac{2205}{2048}$	$\frac{2205}{4096}$	$-\frac{315}{2048}$	$\frac{315}{16384}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{43659}{65536}$	$-\frac{72765}{65536}$	$\frac{10395}{16384}$	$-\frac{31185}{131072}$	$\frac{3465}{65536}$	$-\frac{693}{131072}$	0	0	0	0	0
$\frac{693693}{1048576}$	$-\frac{297297}{262144}$	$\frac{1486485}{2097152}$	$-\frac{165165}{524288}$	$\frac{99099}{1048576}$	$-\frac{9009}{524288}$	$\frac{3003}{2097152}$	0	0	0	0
$\frac{2760615}{4194304}$	$-\frac{19324305}{16777216}$	$\frac{6441435}{8388608}$	$-\frac{6441435}{16777216}$	$\frac{585585}{4194304}$	$-\frac{585585}{16777216}$	$\frac{45045}{8388608}$	$-\frac{6435}{16777216}$	0	0	0
$\frac{703956825}{1073741824}$	$-\frac{78217425}{67108864}$	$\frac{109504395}{134217728}$	$-\frac{29864835}{67108864}$	$\frac{49774725}{268435456}$	$-\frac{3828825}{67108864}$	$\frac{1640925}{134217728}$	$-\frac{109395}{67108864}$	$\frac{1093595}{1073741824}$	0	0
$\frac{2807136475}{4294967296}$	$-\frac{5052845655}{4294967296}$	$\frac{459349605}{536870912}$	$-\frac{1071815745}{2147483648}$	$\frac{247342095}{1073741824}$	$-\frac{176672925}{2147483648}$	$\frac{11778195}{536870912}$	$-\frac{35334585}{8589934592}$	$\frac{2078505}{4294967296}$	$-\frac{230945}{8589934592}$	0

IV.5. SÉRIE DE FOURIER DE  $(1 - \epsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{1}{2}}$

Limitando os cálculos aos quatro termos iniciais, a expressão integranda IV.5.5 torna-se em:

$$\begin{aligned}
 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi)^{-\frac{3}{2}} &= \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{g}() + o() \\
 &\simeq \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^6 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{45}{64} & -\frac{60}{64} & \frac{15}{64} & 0 \\ \frac{175}{256} & -\frac{525}{512} & \frac{105}{256} & -\frac{35}{512} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 0\chi \\ \cos 2\chi \\ \cos 4\chi \\ \cos 6\chi \end{bmatrix} \\
 \text{(IV.5.6)} \quad &\simeq \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6\right) \\ -\left(\frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{60}{64}\varepsilon^4 + \frac{525}{512}\varepsilon^6\right) \\ \left(\frac{15}{64}\varepsilon^4 + \frac{105}{256}\varepsilon^6\right) \\ -\frac{35}{512}\varepsilon^6 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \cos 0\chi \\ \cos 2\chi \\ \cos 4\chi \\ \cos 6\chi \end{bmatrix} \\
 &\simeq \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6 + o(\varepsilon^8)\right) \cos 0\chi - \\
 &\quad - \left(\frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{60}{64}\varepsilon^4 + \frac{525}{512}\varepsilon^6 + o(\varepsilon^8)\right) \cos 2\chi + \\
 &\quad + \left(\frac{15}{64}\varepsilon^4 + \frac{105}{256}\varepsilon^6 + o(\varepsilon^8)\right) \cos 4\chi - \\
 &\quad - \left(\frac{35}{512}\varepsilon^6 + o(\varepsilon^8)\right) \cos 6\chi + o(\varepsilon^8)
 \end{aligned}$$

#### IV.6. Integração

A determinação do comprimento do Arco de Meridiano faz-se agora por *primitivação imediata termo a termo*.

A definição do comprimento do arco foi vista (*função IV.1.3*) e repete-se aqui:

$$F(\varphi) = a \left(1 - \varepsilon^2\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \chi\right)^{-\frac{3}{2}} d\chi + F(\varphi_0)$$

Fixar a constante de integração corresponde a seleccionar uma *origem* para a medição dos comprimentos. É usual localizar essa origem nos pontos do *Equador* (latitudes nulas). Aceitando esta *convenção* ( $\varphi_0 = 0 \Rightarrow F = 0$ ), podemos prescindir de mais

explicitações desta constante. Com a *expansão* IV.5.6, o desenvolvimento do comprimento do arco é:

$$\begin{aligned}
 F(\varphi) &\simeq a(1-\varepsilon^2) \left[ \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6\right) \int_0^\varphi 1d\chi - \right. \\
 &\quad - \left(\frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{60}{64}\varepsilon^4 + \frac{525}{512}\varepsilon^6\right) \int_0^\varphi \cos 2\chi d\chi + \\
 &\quad + \left(\frac{15}{64}\varepsilon^4 + \frac{105}{256}\varepsilon^6\right) \int_0^\varphi \cos 4\chi - \\
 &\quad \left. - \left(\frac{35}{512}\varepsilon^6\right) \int_0^\varphi \cos 6\chi \right] \\
 \text{(IV.6.1)} \quad &\simeq a(1-\varepsilon^2) \left[ \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6\right) \varphi - \right. \\
 &\quad - \left(\frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{60}{64}\varepsilon^4 + \frac{525}{512}\varepsilon^6\right) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \\
 &\quad + \left(\frac{15}{64}\varepsilon^4 + \frac{105}{256}\varepsilon^6\right) \frac{1}{4} \sin 4\varphi - \\
 &\quad \left. - \left(\frac{35}{512}\varepsilon^6\right) \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right]
 \end{aligned}$$

Se, na *expressão* IV.6.1,  $\varepsilon = 0$  (*excentricidade nula*), então  $F(\varphi) = a\varphi$ .

Usando as matrizes já apresentadas na *expressão* IV.5.5, a função  $F(\varphi)$  converte-se em:

$$\text{(IV.6.2)} \quad F(\varphi) = a(1-\varepsilon^2) \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{h}(\varphi) + o(\varepsilon^{20})$$

*expressão* esta em que o anterior vector coluna  $\mathbf{g}(\chi)$  com os *cosenos* foi substituído pelo produto:

$$\text{(IV.6.3)} \quad \mathbf{Q} \times \mathbf{h}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi \\ \sin 2\varphi \\ \sin 4\varphi \\ \sin 6\varphi \\ \sin 8\varphi \\ \sin 10\varphi \\ \sin 12\varphi \\ \sin 14\varphi \\ \sin 16\varphi \\ \sin 18\varphi \end{bmatrix}$$

Por vezes a distância de um ponto do elipsóide ao Equador é designada por *distância meridiana*.  $F(\varphi)$  exprime a dependência da *distância meridiana* relativamente à *latitude geodésica*. A *Figura* IV.6.1 mostra um aspecto importante da *rectificação* do meridiano: a um crescimento de *linear médio* sobrepõe-se uma função *oscilante* de período  $\pi$  que torna a variação do arco por cada incremento do ângulo menos pronunciado junto ao Equador.

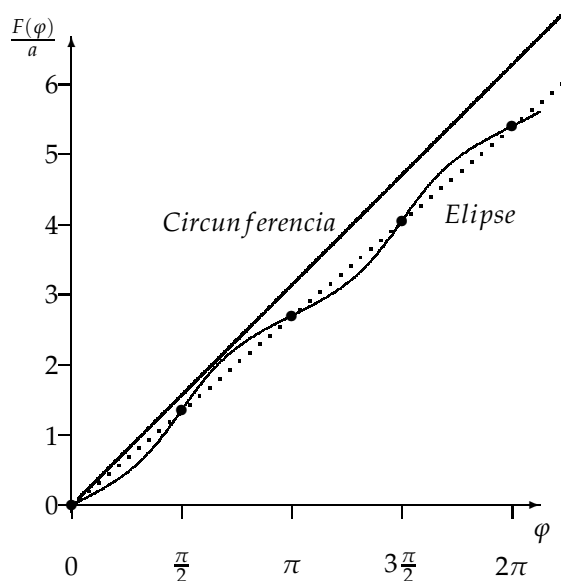


FIGURA IV.6.1. Arco em função da latitude elipsóidica

#### IV.7. Andamento de $F(\varphi)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

A propriedade mais saliente de  $F(\varphi)$  é a de que se trata de uma *função ímpar*, pois todos os termos em que se decompõe são funções ímpares. Isso significa que tem uma primeira derivada par e uma segunda derivada ímpar.

O crescimento linear de  $F(\varphi)$  tem a sua expressão analítica no primeiro termo da Equação IV.6.1. O coeficiente de  $\varphi$  neste termo *decrece* à medida que a *excentricidade aumenta*. Note-se que este decréscimo é limitado (conf. Figura IV.7.1):

$$(IV.7.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F\left(\varepsilon, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) = a$$

Quando a excentricidade é extremamente grande, o semi-diâmetro menor colapsa sobre o centro, a elipse degenera no diâmetro maior e então o arco entre  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  *confunde-se* com o semi-diâmetro maior, cujo comprimento é  $a$ .

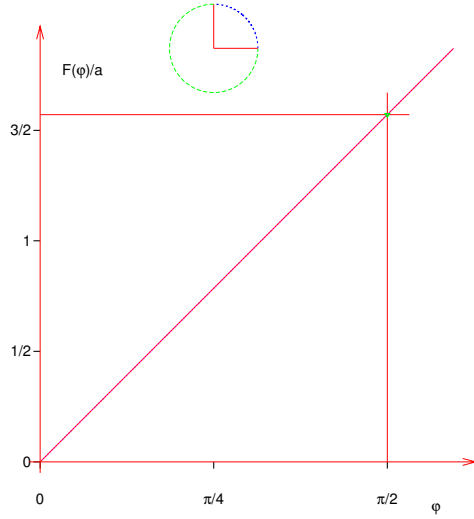
Para elipses pouco achatadas —  $\varepsilon \simeq 0$  — vale:

$$(IV.7.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\varepsilon, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \times a$$

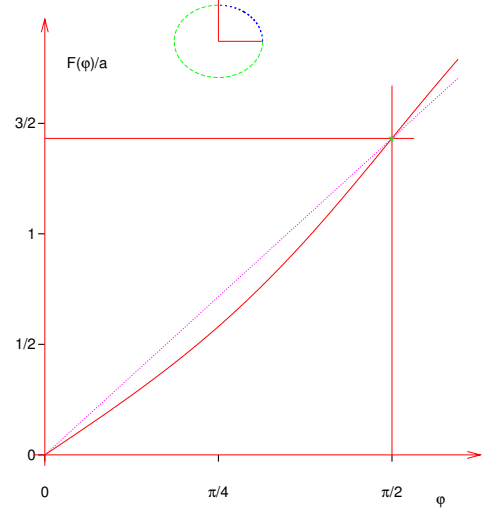
A circunferência é o caso limite  $\varepsilon = 0$ , onde o declive médio de  $\frac{F(\varphi)}{a}$  — dado pelo coeficiente do primeiro termo da Equação IV.6.1 — tem como valor a *unidade*. A circunferência tem portanto o *máximo perímetro* entre todas as elipses com *igual semi-eixo maior*.

Para o estudo do erro resultante de se considerar apenas alguns termos iniciais do desenvolvimento — série *truncada* — irá interessar o conhecimento da derivada:

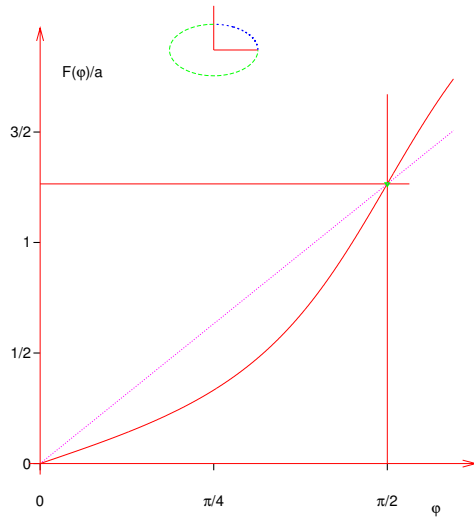
$$(IV.7.3) \quad F'(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}$$



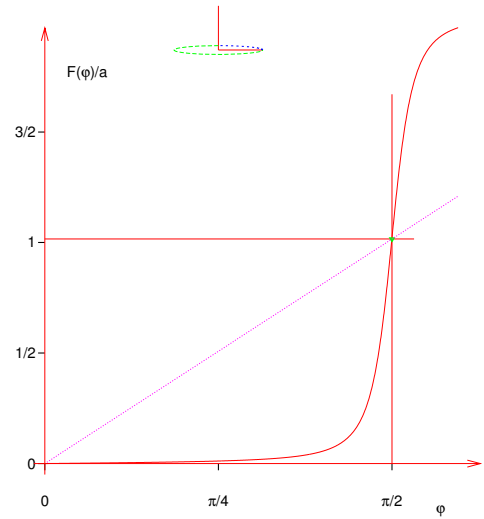
(a)  $\varepsilon^2 = 0.00$



(b)  $\varepsilon^2 = 0.33$



(c)  $\varepsilon^2 = 0.66$



(d)  $\varepsilon^2 = 0.99$

FIGURA IV.7.1.  $F(\varphi)$  no primeiro quadrante.

Todo o presente Capítulo IV teve como objectivo a determinação do *integral do raio de curvatura* da elipse em função da latitude elipsóidica:

$$\int_0^\varphi M(\chi) d\chi$$

que acabámos por designar por  $F(\varphi)$ . Então a função integranda

$$M(\varphi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

é a derivada que procuramos (*conf. Figura IV.7.2*). Nos casos extremos estão:

- (1) a circunferência, em que  $M(\varphi)$  é a constante  $a$  (igual a  $b$ );
- (2) e a elipse de  $\varepsilon$  muito próxima da unidade.

$M(\varphi)$  é o raio de curvatura do círculo osculador local. Por muito grande que seja a excentricidade, ela será sempre inferior à unidade e o raio de curvatura será sempre positivo, embora pequeno junto aos vértices do semi-diâmetro maior. Esta grandeza é positiva no sentido estrito em toda a recta real. Significa isto que não há máximos nem mínimos locais — *pontos críticos* — na função  $F(\varphi)$ . A função é *monótona crescente* em todo o seu domínio. A não existência de extremos tem outra consequência mais importante: determina que  $F(\varphi)$  possui *função inversa* definida sobre toda a recta real, qualquer que seja a *excentricidade*.

A segunda derivada de  $F(\varphi)$  é a primeira derivada de  $M(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} F''(\varphi) &= M'(\varphi) \\ &= \left[ \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right]' \\ (IV.7.4) \quad &= M(\varphi) \times \frac{3}{2} \times \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} \end{aligned}$$

Devido à presença do factor  $\sin 2\varphi$ , a segunda derivada anula-se nas abcissas múltiplas inteiras de  $\frac{\pi}{2}$ . Nestas abcissas  $F(\varphi)$  muda o sentido da sua concavidade. Mais precisamente, é côncava nos quadrantes ímpares — I e III — e convexa nos quadrantes pares. Nas transições dos quadrantes  $F(\varphi)$  sofre uma inflexão. Os pontos de anulamento da segunda derivada identificam também os extremos locais da primeira derivada, que é raio do círculo osculador  $M(\varphi)$  e também o declive da tangente a  $F(\varphi)$ : *mínimos locais* em  $n \times \pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  — isto é, quando o raio vector passa pelo *semi-diâmetro maior*, ou o Equador — e *máximos locais* em  $\frac{\pi}{2} + n \times \pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  — quando o raio vector passa pelo *semi-diâmetro menor*, ou os pólos.

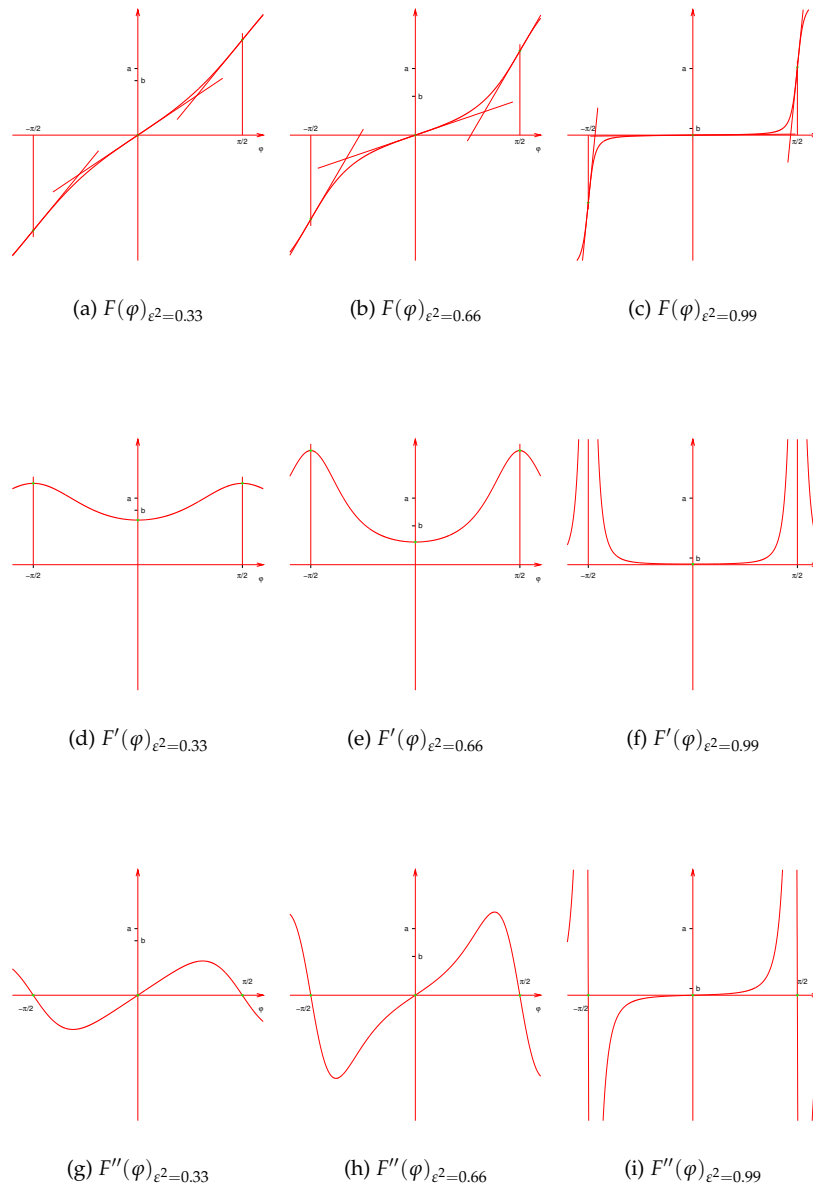


FIGURA IV.7.2. Primeiras derivadas de  $F(\varphi)$  nos quadrantes direitos.



## CAPÍTULO V

# Elipsóide de Hayford 1910

### V.1. Parâmetros fundamentais

É definido pela sua elipse geratriz, cujos parâmetros estão indicados na *Tabela V.1.1*(*conf. [13]*). Uma elipse fica definida por dois parâmetros. Os dois valores exactos indicados na *Tabela V.1.1* são o *semi-eixo de rotação* e o *recíproco do achatamento*. Estes serão então os parâmetros fundamentais, e todos os restantes podem deduzir-se deles como parâmetros secundários.

Há referências onde o elipsóide é caracterizado de outra maneira: considera-se como parâmetros exactos o *recíproco do achatamento* e o *raio equatorial* (*Tabela V.1.2, conf. [6]*). Usaremos esta última convenção.

A expressão do *semi-eixo de rotação* deduz-se dos outros dois por:

$$(V.1.1) \quad \begin{aligned} \frac{a}{a-b} &= 297 \\ b &= \frac{296}{297}a \end{aligned}$$

TABELA V.1.1. *Elipsóide de Hayford 1910*

<i>Raio equatorial</i>	$a$	$6378388 \pm 18 \text{ m}$
<i>Semieixo de rotação</i>	$b$	$6356912 \text{ m}$
<i>Recíproco do achatamento</i>	$\frac{1}{f} = \frac{a}{a-b}$	$297.0 \pm 0.5$

TABELA V.1.2. *Elipsóide Internacional 1924*

<i>Raio equatorial</i>	$a$	$6378388 \text{ m}$
<i>Semieixo de rotação</i>	$b$	$6356911.2 \text{ m}$
<i>Recíproco do achatamento</i>	$\frac{1}{f} = \frac{a}{a-b}$	$297$

TABELA V.1.3.  $F(\varphi) = C_0\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin 2n\varphi$  [m]

$n$	$C_n$			
0	6367654.500057	583747	480756	420587
1	-16107.034678	499406	630894	016177
2	16.976210	953791	517281	539128
3	-0.022265	965065	721533	654831
4	0.000031	681123	137867	086404
5	-0.000000	047014	142292	196694
6	0.000000	000071	573896	707171
7	-0.000000	000000	110845	071038
8	0.000000	000000	000173	779551
9	-0.000000	000000	000000	274962

Se o recíproco do achatamento for designado por  $\frac{1}{f}$ , com o valor indicado na *Tabela V.1.2*, a expressão do quadrado da primeira excentricidade torna-se em:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 &= \frac{c^2}{a^2} \\
 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\
 &= \frac{2\left(\frac{1}{f}\right) - 1}{\left(\frac{1}{f}\right)^2} \\
 \text{(V.1.2)} \quad &= \frac{593}{88209}
 \end{aligned}$$

Agora já é possível determinar a amplitude do coeficiente linear e das harmónicas que aparecem no desenvolvimento do comprimento do arco IV.6.2 (*Tabela V.1.3*). Com os dez termos assinalados, o termo residual é  $< 10^{-18}[m]$ . A *Tabela V.1.4* foi obtida com as harmónicas indicadas na *Tabela V.1.3*, tendo sido usadas apenas as primeiras quatro e com precisão de 4 casas decimais. Os cálculos foram efectuados com precisão dupla (*double* em vez de *float*). O seu ajustamento aos valores de idêntica tabela publicada em [3] vai até a uma unidade da casa dos milímetros.

Por simples inspecção do desenvolvimento expresso na *Tabela V.1.3* se pode concluir o seguinte:

FACT. Para o cálculo da série com precisão de 1 metro são suficientes os três primeiros termos:

$$\text{(V.1.3)} \quad F(\varphi) = 6367654.500 \cdot \varphi - 16107.035 \cdot \sin 2\varphi + 16.976 \cdot \sin 4\varphi \pm 0.022 \text{ [m]}$$

Para obter a precisão de 1 milímetro, bastam os quatro primeiros termos:

$$\text{(V.1.4)} \quad F(\varphi) = 6367654.500058 \cdot \varphi - 16107.034679 \cdot \sin 2\varphi + 16.976211 \cdot \sin 4\varphi - 0.022265 \cdot \sin 6\varphi \pm 0.032 \text{ [mm]}$$

A primeira derivada da série da *Tabela V.1.3* é:

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = M(\varphi)$$

TABELA V.1.4.  $0.9996 \cdot F(\varphi)$   
 $\varphi = 38^\circ 00' (01') 38^\circ 59', 10D$

$\varphi$	$0.9996 \cdot F(\varphi)$ [m]	$\varphi$	$0.9996 \cdot F(\varphi)$ [m]
$38^\circ 00'$	4205884.765	$38^\circ 30'$	4261364.680
$38^\circ 01'$	4207734.019	$38^\circ 31'$	4263214.093
$38^\circ 02'$	4209583.278	$38^\circ 32'$	4265063.510
$38^\circ 03'$	4211432.543	$38^\circ 33'$	4266912.933
$38^\circ 04'$	4213281.812	$38^\circ 34'$	4268762.362
$38^\circ 05'$	4215131.087	$38^\circ 35'$	4270611.796
$38^\circ 06'$	4216980.368	$38^\circ 36'$	4272461.235
$38^\circ 07'$	4218829.653	$38^\circ 37'$	4274310.679
$38^\circ 08'$	4220678.944	$38^\circ 38'$	4276160.129
$38^\circ 09'$	4222528.240	$38^\circ 39'$	4278009.584
$38^\circ 10'$	4224377.541	$38^\circ 40'$	4279859.044
$38^\circ 11'$	4226226.848	$38^\circ 41'$	4281708.509
$38^\circ 12'$	4228076.160	$38^\circ 42'$	4283557.980
$38^\circ 13'$	4229925.477	$38^\circ 43'$	4285407.456
$38^\circ 14'$	4231774.800	$38^\circ 44'$	4287256.938
$38^\circ 15'$	4233624.128	$38^\circ 45'$	4289106.425
$38^\circ 16'$	4235473.461	$38^\circ 46'$	4290955.917
$38^\circ 17'$	4237322.799	$38^\circ 47'$	4292805.414
$38^\circ 18'$	4239172.143	$38^\circ 48'$	4294654.917
$38^\circ 19'$	4241021.492	$38^\circ 49'$	4296504.425
$38^\circ 20'$	4242870.846	$38^\circ 50'$	4298353.938
$38^\circ 21'$	4244720.206	$38^\circ 51'$	4200203.457
$38^\circ 22'$	4246569.571	$38^\circ 52'$	4302052.981
$38^\circ 23'$	4248418.941	$38^\circ 53'$	4303902.510
$38^\circ 24'$	4250268.316	$38^\circ 54'$	4305752.045
$38^\circ 25'$	4252117.697	$38^\circ 55'$	4307601.585
$38^\circ 26'$	4253967.083	$38^\circ 56'$	4309451.130
$38^\circ 27'$	4255816.474	$38^\circ 57'$	4311300.681
$38^\circ 28'$	4257665.871	$38^\circ 58'$	4313150.237
$38^\circ 29'$	4259515.273	$38^\circ 59'$	4314999.798

cujo valor máximo ocorre quando  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  — a latitude dos pólos (*conf. Secção IV.7*):

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dF}{d\varphi} \right|_{\frac{\pi}{2}} &= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \frac{\pi}{2})^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
 &= \frac{a^2}{b} = a \times \frac{1}{\frac{b}{a} - 1} \\
 &= 6378388 \times \frac{297}{296} \\
 \text{(V.1.5)} \quad &= 6399936.6(081) [m]
 \end{aligned}$$

## V.2. Considerações sobre a precisão do cálculo

O maior valor absoluto do ângulo que, em qualquer situação, faria sentido considerar na *Equação V.1.3* é  $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ , que corresponde à latitude dos pólos. Na verdade, a Projecção de GAUSS-KRÜGER não é usada nas calotes polares, pois outras projecções são mais apropriadas para essas zonas.

Para se obter um resultado correcto *ao milímetro*, na série da *Tabela V.1.3*, os quatro primeiros termos são suficientes. Assim, a maior ordem harmónica a considerar é 6:

$$(V.2.1) \quad F(\varphi) \simeq C_0\varphi + C_1 \sin 2\varphi + C_2 \sin 4\varphi + C_3 \sin 6\varphi$$

O comprimento do arco de Meridiano desde o Equador a um dos pólos obtém-se da *Expressão V.2.1* substituindo  $\varphi$  por  $\frac{\pi}{2}$ :

$$(V.2.2) \quad \begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}\right) &\simeq C_0\frac{\pi}{2} + C_1 \sin 2\frac{\pi}{2} + C_2 \sin 4\frac{\pi}{2} + C_3 \sin 6\frac{\pi}{2} \\ &\simeq C_0\frac{\pi}{2} + C_1 \sin \pi + C_2 \sin 2\pi + C_3 \sin 3\pi \\ &\simeq C_0\frac{\pi}{2} + C_1 0 + C_2 0 + C_3 0 \\ &\simeq C_0\frac{\pi}{2} \\ &\simeq 10002288.298 \pm 0.5 \times 10^{-3} [m] \end{aligned}$$

Por outro lado, a *variação do arco* em função do ângulo é:

$$\begin{aligned} \Delta F(\varphi) &= \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \Delta\varphi + o(\Delta^2\varphi) \\ &= M(\varphi) \Delta\varphi + o(\Delta^2\varphi) \end{aligned}$$

Adiante assumiremos a aproximação de primeira ordem como suficiente.

Se o *limite do erro absoluto* for estabelecido nos pontos onde o declive da tangente é máximo, esse limite será válido para todos os restantes pontos — por maioria de razão (*Figura V.2.1*).

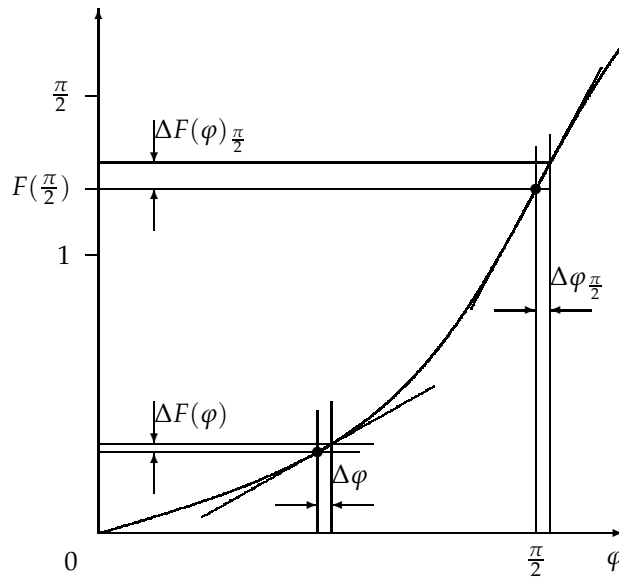
Fazendo  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= M\left(\frac{\pi}{2}\right) \Delta\varphi \\ &= 6399936.608108108108 \cdot \Delta\varphi [m] \end{aligned}$$

Este valor é exacto no Elipsóide Internacional, podendo ser facilmente tomado com qualquer número de dígitos, ou na sua forma fraccionária (*conf. Expressão V.1.5*).

Fixando o *erro absoluto máximo* pretendido para este arco em 0.5 mm, o *erro absoluto da latitude elipsóidica* terá que verificar:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\Delta F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6399936.608108108108} \\ &\leq \frac{0.5 \times 10^{-3} [m]}{6399936.608108108108 [m]} \\ &\leq 0.0000000007812577383 [rad] \\ &\leq .0000161145976'' \end{aligned}$$

FIGURA V.2.1. Delimitação de  $\Delta F(\varphi)$  em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ 

Como o erro relativo do produto é igual à soma dos erros relativos dos factores (*conf.* [10]), o erro relativo de  $F(\frac{\pi}{2})$  só irá depender do erro relativo de  $\varphi$ . O *máximo erro relativo* que é permitido na medição da latitude elipsóidica é:

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi} &= \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \\ &\leq \frac{0.0000000007812577383}{1.570796326794896619237} \\ &\leq 0.0000000001243410308 \\ &\leq 1.24 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

### V.3. Série de Potências

Para acelerar o cálculo pode exprimir-se o arco rectificado, não como a soma de um termo linear com uma série de Fourier, mas como uma série de potências. Para tanto basta desenvolver os termos em *seno*:

$$(V.3.1) \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Usando esta identidade, a *matriz coluna*  $\mathbf{h}(\varphi)$  que aparece nas *expressões* IV.6.2 e IV.6.3 pode ser substituída pelo produto indicado na *Tabela* V.3.5.

Designaremos por  $\mathbf{S}$  a matriz dos coeficientes do seno, e por  $\mathbf{p}$  a matriz coluna com as potências ímpares de  $\varphi$ . A *Expansão* IV.6.2 toma a nova forma:

$$(V.3.2) \quad F(\varphi) = a(1 - \varepsilon^2) \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{S} \times \mathbf{p}(\varphi) + o(\varepsilon^{20})$$

TABELA V.3.5. Produto  $\mathbf{S} \times \mathbf{p}$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \sin 2\varphi \\ \sin 4\varphi \\ \sin 6\varphi \\ \sin 8\varphi \\ \sin 10\varphi \\ \sin 12\varphi \\ \sin 14\varphi \\ \sin 16\varphi \\ \sin 18\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -\frac{2^3}{3!} & \frac{2^5}{5!} & -\frac{2^7}{7!} & \frac{2^9}{9!} & -\frac{2^{11}}{11!} & \frac{2^{13}}{13!} & -\frac{2^{15}}{15!} & \frac{2^{17}}{17!} & -\frac{2^{19}}{19!} & \dots \\ 4 & -\frac{4^3}{3!} & \frac{4^5}{5!} & -\frac{4^7}{7!} & \frac{4^9}{9!} & -\frac{4^{11}}{11!} & \frac{4^{13}}{13!} & -\frac{4^{15}}{15!} & \frac{4^{17}}{17!} & -\frac{4^{19}}{19!} & \dots \\ 6 & -\frac{6^3}{3!} & \frac{6^5}{5!} & -\frac{6^7}{7!} & \frac{6^9}{9!} & -\frac{6^{11}}{11!} & \frac{6^{13}}{13!} & -\frac{6^{15}}{15!} & \frac{6^{17}}{17!} & -\frac{6^{19}}{19!} & \dots \\ 8 & -\frac{8^3}{3!} & \frac{8^5}{5!} & -\frac{8^7}{7!} & \frac{8^9}{9!} & -\frac{8^{11}}{11!} & \frac{8^{13}}{13!} & -\frac{8^{15}}{15!} & \frac{8^{17}}{17!} & -\frac{8^{19}}{19!} & \dots \\ 10 & -\frac{10^3}{3!} & \frac{10^5}{5!} & -\frac{10^7}{7!} & \frac{10^9}{9!} & -\frac{10^{11}}{11!} & \frac{10^{13}}{13!} & -\frac{10^{15}}{15!} & \frac{10^{17}}{17!} & -\frac{10^{19}}{19!} & \dots \\ 12 & -\frac{12^3}{3!} & \frac{12^5}{5!} & -\frac{12^7}{7!} & \frac{12^9}{9!} & -\frac{12^{11}}{11!} & \frac{12^{13}}{13!} & -\frac{12^{15}}{15!} & \frac{12^{17}}{17!} & -\frac{12^{19}}{19!} & \dots \\ 14 & -\frac{14^3}{3!} & \frac{14^5}{5!} & -\frac{14^7}{7!} & \frac{14^9}{9!} & -\frac{14^{11}}{11!} & \frac{14^{13}}{13!} & -\frac{14^{15}}{15!} & \frac{14^{17}}{17!} & -\frac{14^{19}}{19!} & \dots \\ 16 & -\frac{16^3}{3!} & \frac{16^5}{5!} & -\frac{16^7}{7!} & \frac{16^9}{9!} & -\frac{16^{11}}{11!} & \frac{16^{13}}{13!} & -\frac{16^{15}}{15!} & \frac{16^{17}}{17!} & -\frac{16^{19}}{19!} & \dots \\ 18 & -\frac{18^3}{3!} & \frac{18^5}{5!} & -\frac{18^7}{7!} & \frac{18^9}{9!} & -\frac{18^{11}}{11!} & \frac{18^{13}}{13!} & -\frac{18^{15}}{15!} & \frac{18^{17}}{17!} & -\frac{18^{19}}{19!} & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi^3 \\ \varphi^5 \\ \varphi^7 \\ \varphi^9 \\ \varphi^{11} \\ \varphi^{13} \\ \varphi^{15} \\ \varphi^{17} \\ \varphi^{19} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Se observarmos com atenção a matriz da *Tabela V.3.5* vemos que é prudente não tomar demasiados termos. Quando incluímos ângulos múltiplos de  $\varphi$ , introduzimos elementos na matriz cujos numeradores são potências da ordem da harmônica. Embora os factoriais dos denominadores acabem por ultrapassar as potências dos numeradores, isso pode acontecer apenas para índices muito elevados, obrigando a um esforço de cálculo desnecessariamente pesado.

Considere-se agora o desenvolvimento de um múltiplo natural do seno:

$$(V.3.3) \quad \sin n\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(n\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Decompondo a série infinita numa soma inicial com  $M_n$  termos — dependente da harmônica — com a soma dos restantes termos, tem-se:

$$(V.3.4) \quad \begin{aligned} \sin n\varphi &= \sum_{i=0}^{M_n} (-1)^i \frac{(n\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!} + R_{M_n+1} \\ R_{M_n+1} &= \sin n\varphi - \sum_{i=0}^{M_n} (-1)^i \frac{(n\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

Como os termos da série expressa pela *Equação V.3.1*, além de serem evanescentes — de uma certa ordem  $\nu$  em diante — também têm o sinal alternado, aplica-se o seguinte:

CRITERION V.3.1. (*convergência de LEIBNITZ*) Uma série cujos termos são evanescentes em valor absoluto e de sinais alternados é, não apenas convergente, mas a sua soma inicial de ordem  $n$  aproxima-se em valor absoluto do limite mais que o primeiro termo desprezado (conf. [9]):

$$(V.3.5) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}, u_n > 0 \wedge u_n \downarrow 0 \wedge S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots \Rightarrow |S - S_n| \leq u_{n+1}$$

Sendo portanto o valor absoluto do resto de ordem  $M_n + 1$  da *Série V.3.3* limitado por:

$$(V.3.6) \quad \begin{aligned} |R_{M_n+1}| &< \frac{(n\varphi)^{2(M_n+1)+1}}{[2(M_n+1)+1]!} \\ &< \frac{(n\varphi)^{2M_n+3}}{(2M_n+3)!} \end{aligned}$$

Passando agora à função  $F(\varphi)$ , segundo a *Expressão da Tabela V.1.3*:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &\simeq C_0\varphi + C_1 \sin 2\varphi + C_2 \sin 4\varphi + C_3 \sin 6\varphi \\ &\simeq C_0\varphi + \\ &\quad C_1 \left[ \sum_{i=0}^{M_1} (-1)^i \frac{(2\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!} + R_{M_1+1} \right] + \\ &\quad C_2 \left[ \sum_{i=0}^{M_2} (-1)^i \frac{(4\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!} + R_{M_2+1} \right] + \\ &\quad C_3 \left[ \sum_{i=0}^{M_3} (-1)^i \frac{(6\varphi)^{2i+1}}{(2i+1)!} + R_{M_3+1} \right] \end{aligned}$$

De que resultará um erro de truncagem limitado superiormente por:

$$\left| \Delta_{F_{M_1, M_2, M_3}} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq |C_1 R_{M_1+1}| + |C_2 R_{M_2+1}| + |C_3 R_{M_3+1}|$$

TABELA V.3.6.  $(-1)^{M+1} \frac{C_n(n\varphi)^{2M+3}}{(2M+3)!}$   $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $n = 2, 4, 6$

$M$	$(-1)^{M+1} \frac{C_1(\pi)^{2M+3}}{(2M+3)!}$ [m]	$(-1)^{M+1} \frac{C_2(2\pi)^{2M+3}}{(2M+3)!}$ [m]	$(-1)^{M+1} \frac{C_3(3\pi)^{2M+3}}{(2M+3)!}$ [m]	$\limsup  \Delta F_M(\frac{\pi}{2}) $ [m]
0	83236.5289567894438628	-701.8254584218617205	3.1067310302174341	83941.4611462415230174
1	-41075.5806261665467621	1385.3479266473926210	-13.7979928119756895	42474.7265456259150726
2	9652.3745553646224484	-1302.1748565599165871	29.1815851249874144	10983.7309970495264499
3	-1323.1266443415224824	713.9972608495365008	-36.0013376225424433	2073.1252428136014265
4	118.7157868381062255	-256.2498366562302638	29.0715512927358113	404.0371747870723006
5	-7.5107554631805086	64.8483209138656273	-16.5533486876123305	88.9124250646584664
6	0.3529913579757728	-12.1909956856141579	7.0017858454296606	19.5457728890195913
7	-0.0128084009567066	1.7694162451823364	-2.2865577483817639	4.0687823945208069
8	0.0003696311416761	-0.2042507410621122	0.5938794846519376	0.7984998568557259
9	-0.0000086859836730	0.0191988001229751	-0.1256004766165166	0.1448079627231647
10	0.0000001694213887	-0.0014979016773861	0.0220487018797226	0.0235467729784974
11	-0.0000000027868701	0.0000985579799168	-0.0032641794766562	0.0033627402434431
12	0.0000000000391813	-0.0000055426112384	0.0004130276939583	0.0004185703443780
13	-0.0000000000004762	0.0000002694747796	-0.0000451819944760	0.0000454514697318
14	0.0000000000000050	-0.0000000114391805	0.0000043154362406	0.0000043268754261

Na sequência, far-se-á  $M_1 = M_2 = M_3$ . A *Tabela V.3.6* permite avaliar a importância dos erros de truncagem das séries dos senos individualmente, assim como o limite máximo do efeito conjunto. Se pretendermos, como até aqui, limitar a precisão do cálculo do comprimento do arco Meridiano ao milímetro, devemos optar por  $M = 12$ . Na *Tabela V.3.7* estão indicados os valores iniciais (em frações) do de-

TABELA V.3.7. Primeiros quatro termos de  $\mathbf{S} \times \mathbf{p}$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \sin 2\varphi \\ \sin 4\varphi \\ \sin 6\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{32}{3} & -36 \\ 0 & \frac{4}{15} & \frac{128}{15} & \frac{324}{5} \\ 0 & -\frac{8}{315} & -\frac{1024}{315} & -\frac{1944}{35} \\ 0 & \frac{4}{2835} & \frac{2048}{2835} & \frac{972}{35} \\ 0 & -\frac{8}{155925} & -\frac{16384}{155925} & -\frac{17496}{1925} \\ 0 & \frac{8}{6081075} & \frac{65536}{6081075} & \frac{52488}{25025} \\ 0 & -\frac{16}{638512875} & -\frac{524288}{638512875} & -\frac{314928}{875875} \\ 0 & \frac{4}{10854718875} & \frac{524288}{10854718875} & \frac{708588}{14889875} \\ 0 & -\frac{8}{1856156927625} & -\frac{4194304}{1856156927625} & -\frac{1417176}{282907625} \\ 0 & \frac{8}{194896477400625} & \frac{16777216}{194896477400625} & \frac{4251528}{9901766875} \\ 0 & -\frac{16}{49308808782358125} & -\frac{134217728}{49308808782358125} & -\frac{76527504}{2505147019375} \\ 0 & \frac{8}{3698160658676859375} & \frac{268435456}{3698160658676859375} & \frac{114791256}{62628675484375} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi^3 \\ \varphi^5 \\ \varphi^7 \\ \varphi^9 \\ \varphi^{11} \\ \varphi^{13} \\ \varphi^{15} \\ \varphi^{17} \\ \varphi^{19} \\ \varphi^{21} \\ \varphi^{23} \\ \varphi^{25} \end{bmatrix}$$

TABELA V.3.8.  $F(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[\text{rad}]$

$$\begin{aligned}
 F(\varphi) = & 6335508.20220158940697661236 \cdot \varphi \\
 & +21295.76553359375187530258 \cdot \varphi^3 \\
 & -4151.77980330225295250113 \cdot \varphi^5 \\
 & +355.10501413399399057359 \cdot \varphi^7 \\
 & -11.07269078180812404201 \cdot \varphi^9 \\
 & -0.75788687722838011445 \cdot \varphi^{11} \\
 & +0.11574663661868199624 \cdot \varphi^{13} \\
 & -0.00564886337873993569 \cdot \varphi^{15} \\
 & -0.00022971504881490594 \cdot \varphi^{17} \\
 & +0.00007157101991352542 \cdot \varphi^{19} \\
 & -0.00000795587844217637 \cdot \varphi^{21} \\
 & +0.00000062374428458899 \cdot \varphi^{23} \\
 & -0.00000003896451750932 \cdot \varphi^{25}
 \end{aligned}$$

envolvimento dos primeiros quatro termos já apresentados na *Tabela V.3.5* (matriz **S**).

O desenvolvimento em série de potências de  $\varphi$  obtém-se do produto:

$$a(1 - \varepsilon^2) \times \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{S}$$

do qual resulta, após os cálculos, a expressão da *Tabela V.3.8* para o comprimento do arco Meridiano.

#### V.4. Expressão no Sistema Sexagesimal

Embora a conversão do sistema sexagesimal para o sistema *natural* — isto é, com os ângulos expressos em radiano — se faça com uma simples multiplicação, é possível remover essa obrigação do cálculo de cada valor, fazendo reflectir nos coeficientes do polinómio essa conversão. Isto obriga a uma reformulação do vector (ou matriz coluna) **p** na *Expressão V.3.2* conforme se indica na *Tabela V.4.9*. Representaremos na sequência esta nova decomposição matricial por:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \times \mathbf{s}$$

em que **R** é a matriz de conversão do *sistema sexagesimal* para o *sistema natural* e **s** o vector — matriz coluna — das sucessivas potências da latitude elipsóidica expressa no *sistema sexagesimal*. O novo polinómio que incorpora a conversão ao sistema natural é:

$$(V.4.1) \quad a(1 - \varepsilon^2) \times \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{S} \times \mathbf{R}$$

cujos coeficientes estão apresentados na *Tabela V.4.10*.

#### V.5. Compensação da Dilatação Aureolar

A Projecção de GAUSS-KRÜGER é, em certa medida, aparentada das projecções cilíndricas transversas. A única região de uma carta usando esta projecção que não sofre qualquer dilatação — linear ou aureolar — é a própria linha do Meridiano Central, escolhido arbitrariamente. Para Leste ou para Oeste a dilatação será

TABELA V.4.9. Conversão da latitude ao sistema natural

$$\begin{bmatrix} \phi^1 \\ \phi^3 \\ \phi^5 \\ \phi^7 \\ \phi^9 \\ \phi^{11} \\ \phi^{13} \\ \phi^{15} \\ \phi^{17} \\ \phi^{19} \\ \phi^{21} \\ \phi^{23} \\ \phi^{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{180} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{17} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\pi}{180}\right)^{25} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi^3 \\ \phi^5 \\ \phi^7 \\ \phi^9 \\ \phi^{11} \\ \phi^{13} \\ \phi^{15} \\ \phi^{17} \\ \phi^{19} \\ \phi^{21} \\ \phi^{23} \\ \phi^{25} \end{bmatrix}$$

V.5. COMPENSAÇÃO DA DILATAÇÃO AUREOLAR

TABELA V.4.10.  $F(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[^\circ]$ 

$$\begin{aligned}
F(\varphi) = & 1.10575477915524 \times 10^5 \cdot \varphi \\
& + 1.13220575832201 \times 10^{-1} \cdot \varphi^3 \\
& - 6.72389851386376 \times 10^{-6} \cdot \varphi^5 \\
& + 1.75185589049540 \times 10^{-10} \cdot \varphi^7 \\
& - 1.66345353588678 \times 10^{-15} \cdot \varphi^9 \\
& - 3.48707883884487 \times 10^{-20} \cdot \varphi^{11} \\
& + 1.64288530891768 \times 10^{-24} \cdot \varphi^{13} \\
& - 2.70488181571538 \times 10^{-29} \cdot \varphi^{15} \\
& - 6.27992096831192 \times 10^{-35} \cdot \varphi^{17} \\
& + 1.43414283071465 \times 10^{-38} \cdot \varphi^{19} \\
& - 2.98231350613269 \times 10^{-42} \cdot \varphi^{21} \\
& - 2.78826757902884 \times 10^{-48} \cdot \varphi^{23} \\
& + 4.03006794222281 \times 10^{-52} \cdot \varphi^{25}
\end{aligned}$$

tanto maior quanto mais afastado do Meridiano Central estiver o ponto representado. Como forma de compensar esta dilatação, o Sistema denominado *Universal Transverse Mercator* (UTM) impõe duas condições:

- (1) Todos os pontos representados estão, no máximo, a 3° de Longitude do Meridiano Central. Para satisfazer esta condição, foram definidos sessenta meridianos centrais, sendo o primeiro afastado 3° do Anti-Meridiano de Greenwich, aos 177° de Longitude Oeste, o seguinte 6° afastado dele, a 171° de Longitude Oeste, etc. A região representável em torno de cada um destes meridianos define no Elipsóide Internacional (ou outro) uma espécie de gomo de laranja ou fuso. O território de Portugal Continental, nesta divisão, estende-se quase por inteiro pelo Fuso 29, cujo Meridiano Central é o de 9° Oeste, o qual atravessa o Mar da Palha entre Lisboa e Alcochete. A maior parte da Espanha está no fuso 30, cujo Meridiano Central está a 3° Oeste. Os fusos 31 a 60 abrangem o Hemisfério Oriental segundo o Meridiano de Greenwich.
- (2) Para reduzir a dilatação nas margens destes fusos, toda a região sofre uma homotetia de redução com o valor normalizado de 0.9996. A deformação será ainda de dilatação nas margens mais afastadas, porém uma dilatação atenuada; a cerca de 180 quilómetros do Meridiano Central a deformação linear é praticamente inexistente e a menos de 180 quilómetros do Meridiano Central a deformação é de contracção; e sobre o Meridiano Central, a contracção é máxima e tem o valor exacto de 0.9996.

As tabelas a seguir ajustam os coeficientes do polinómio para ter em consideração este factor de compensação, vulgarmente referido como  $k_0$ . A *Expressão matricial V.4.1*, por exemplo, é multiplicada pelo escalar  $k_0 = 0.9996$ , para se tornar em:

$$(V.5.1) \quad k_0 \cdot a \cdot (1 - \varepsilon^2) \times \mathbf{E} \times \mathbf{B} \times \mathbf{M} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{S} \times \mathbf{R}$$

e o polinómio referido na *Tabela V.4.10* toma a nova forma da *Tabela V.5.11*.

## V.6. Desenvolvimento na vizinhança do Ponto Central

Para a representação de regiões com uma extensão relativamente pequena em latitude, usa-se muitas vezes um Ponto Central. O desenvolvimento em torno desse ponto permite alcançar a mesma precisão com menor número de termos.

TABELA V.5.11.  $F_{k_0=0.9996}(\varphi) = \sum_{i=0}^{25} u_i \times \varphi^i + o(\varphi^{27}) \quad \varphi[^\circ]$ 

$$\begin{aligned}
F_{k_0=0.9996}(\varphi) = & 1.10531247724358188050 \times 10^5 \cdot \varphi \\
& + 1.13175287601868869218 \times 10^{-1} \cdot \varphi^3 \\
& - 6.72120895445822273272 \times 10^{-6} \cdot \varphi^5 \\
& + 1.75115514813920476988 \times 10^{-10} \cdot \varphi^7 \\
& - 1.66278815447243523904 \times 10^{-15} \cdot \varphi^9 \\
& - 3.48568400730933345707 \times 10^{-20} \cdot \varphi^{11} \\
& + 1.64222815479411686120 \times 10^{-24} \cdot \varphi^{13} \\
& - 2.70379986298909465251 \times 10^{-29} \cdot \varphi^{15} \\
& - 6.27740899992460165280 \times 10^{-35} \cdot \varphi^{17} \\
& + 1.43356917358237379358 \times 10^{-38} \cdot \varphi^{19} \\
& - 2.98112058073024094070 \times 10^{-42} \cdot \varphi^{21} \\
& - 2.78715227199723066728 \times 10^{-48} \cdot \varphi^{23} \\
& + 4.02845591504592529264 \times 10^{-52} \cdot \varphi^{25}
\end{aligned}$$

TABELA V.6.12. *Ponto Central para Portugal Continental*

Latitude	$\varphi$	$39^\circ 40'$	N
Longitude	$\lambda$	$8^\circ 07' 57.806''$	W

TABELA V.6.13.  $F(\Delta\varphi) = \sum_{i=0}^7 u_i \times (\Delta\varphi)^i + o(\Delta\varphi)^8 \quad \Delta\varphi[^\circ]$ 

$$\Delta\varphi = \varphi - 39^\circ 40'$$

$$\begin{aligned}
F(\Delta\varphi) = & 4.3925934331545755301238365 \times 10^6 \\
& + 1.1103136587767734291629302 \times 10^5 \cdot \Delta\varphi \\
& + 9.6282515206628903523920442 \times 10^0 \cdot \Delta\varphi^2 \\
& + 2.2028451467414027319872600 \times 10^{-2} \cdot \Delta\varphi^3 \\
& - 9.7297606516698653210344140 \times 10^{-4} \cdot \Delta\varphi^4 \\
& - 1.5048404894409786478056095 \times 10^{-6} \cdot \Delta\varphi^5 \\
& + 3.8742711419855002400222275 \times 10^{-8} \cdot \Delta\varphi^6 \\
& + 6.2385187632243768829471414 \times 10^{-11} \cdot \Delta\varphi^7
\end{aligned}$$

Por exemplo, para a representação do território de Portugal Continental, usa-se como Ponto Central o indicado na *Tabela V.6.12* (conf. [2]).

A representação de  $F(\varphi)$  em torno de um ponto diferente de 0 deriva da *fórmula de TAYLOR* ( $\Delta\varphi_0 = \varphi - \varphi_0$ ):

$$(V.6.1) \quad \Delta F(\varphi_0) = \frac{F'(\varphi_0)}{1!} \Delta\varphi_0 + \dots + \frac{F^{(n)}(\varphi_0)}{n!} \Delta^n \varphi_0 + \dots$$

Conheceremos o *incremento* de  $F(\varphi)$ , conhecendo o valor das derivadas sucessivas no ponto  $\varphi_0 = 39^\circ 40'$ . Poderíamos determinar as derivadas a partir da *expressão do raio de curvatura IV.1.1*, mas é preferível fazer de outra maneira; partindo do desenvolvimento em *série de potências V.4.10*, obtêm-se todas as derivadas mais facilmente, e depois determina-se o seu valor correspondente à Latitude do Ponto Central. O resultado está registado na *Tabela V.6.13*. É válido, com a precisão de 1 mm, dentro de uma vizinhança de  $\pm 5^\circ$ .



## Latitude em função da distância meridiana

### VI.1. Inversão de uma série de potências

Seja  $y$  uma função de  $x$  determinada por um desenvolvimento em série de potências, convergente numa vizinhança de zero:

$$(VI.1.1) \quad y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$

e pretende-se conhecer a função inversa  $x = f^{-1}(y)$  (Figura VI.1.1). Admitindo para  $x$  também um desenvolvimento em série de potências,

$$(VI.1.2) \quad x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

é possível determinar recursivamente os coeficientes da série inversa (Eq VI.1.2) a partir da série directa (Eq VI.1.1). De facto, se substituirmos  $y$  na série invertida,

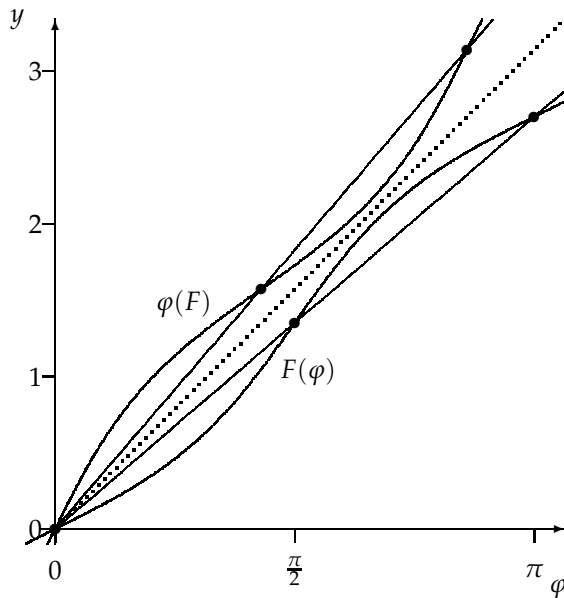


FIGURA VI.1.1. Funções inversas

vem:

$$\begin{aligned}
 x &= A \left( ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \right) + \\
 &\quad B \left( ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \right)^2 + \\
 &\quad C \left( ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \right)^3 + \\
 &\quad D \left( ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \right)^4 + \\
 \text{(VI.1.3)} \quad &\dots
 \end{aligned}$$

Por simples inspeção desta última igualdade se pode concluir o seguinte:

- (1) O primeiro membro da igualdade pode ser entendido como uma série que tem todos os termos nulos excepto o do primeiro grau, com o coeficiente 1, ou seja  $x = 0 + 1x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \dots$ .
- (2) O segundo membro apenas tem um termo do primeiro grau pois os factores de  $B, C, D, \dots$  só têm termos de grau dois ou superior.
- (3) Para que a igualdade se verifique entre os dois membros, é necessário que os coeficientes dos termos semelhantes sejam iguais.

Igualando então os coeficientes dos termos do *primeiro grau* em ambos os membros, obtemos uma primeira relação entre os coeficientes do desenvolvimento conhecido de  $y$  e o do desenvolvimento desconhecido de  $x$ :

$$1 = aA$$

de que resulta  $A = \frac{1}{a}$ .

Substituindo o valor encontrado na expressão da série inversa (Eq VI.1.2), esta passa a ter a forma:

$$\text{(VI.1.4)} \quad x = \frac{1}{a}y + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

Vamos agora ocupar-nos da *segunda potência de y*. Ela pode ser determinada a partir do produto indicado na *Tabela VI.1.1*. Substituindo o valor de  $y^2$  na equação VI.1.4

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{a}y + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots \\
 &= \frac{1}{a}(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots) + \\
 &\quad + B \left[ a^2x^2 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^4 + 2(ad + bc)x^5 + \dots \right] \\
 &\quad \quad \quad + Cy^3 + Dy^4 + \dots \\
 &= x + \left( \frac{b}{a} + Ba^2 \right) x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

e anulando o coeficiente do termo do *segundo grau*,

$$\frac{b}{a} + Ba^2 = 0$$

resulta para  $B$  o valor:

$$B = -\frac{b}{a^3}$$

TABELA VI.1.1. Termos iniciais do quadrado de uma série

			...	$+dx^4$	$+cx^3$	$+bx^2$	$+ax$	
		$\times$	...	$+dx^4$	$+cx^3$	$+bx^2$	$+ax$	
				...	$+adx^5$	$+acx^4$	$+abx^3$	$+a^2x^2$
			...	$+bdx^6$	$+bcx^5$	$+b^2x^4$	$+abx^3$	
	...	$+cdx^7$	$+c^2x^6$	$+bcx^5$	$+acx^4$			
...	$+d^2x^8$	$+cdx^7$	$+bdx^6$	$+adx^5$				
...	$+(d^2 + \dots)x^8$	$+2(cd + \dots)x^7$	$+(c^2 + 2bd + \dots)x^6$	$+2(ad + bc)x^5$	$+(b^2 + 2ac)x^4$	$+2abx^3$	$+a^2x^2$	

Voltando agora à última expressão do desenvolvimentos da série inversa (eq VI.1.4):

$$(VI.1.5) \quad x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

Para a determinação de  $C$  é necessário compilar os termos de *terceira ordem* que aparecem no desenvolvimento de  $y$  (conf eq VI.1.1), de  $y^2$  (conf. Tabela VI.1.1) e de  $y^3$  (conf. Tabela VI.1.2). A equação VI.1.5 toma então a nova forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots \\ &= \frac{1}{a} \left( ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{b}{a^3} \left[ a^2x^2 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^4 + \dots \right] + \\ &\quad C \left[ a^3x^3 + 3a^2bx^4 + 3a(b^2 + ac)x^5 + \dots \right] + \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Retirando os termos do terceiro grau do segundo membro e igualando a zero,

$$\frac{c}{a} - \frac{2b^2}{a^2} + Ca^3 = 0$$

forma-se a equação de definição da constante  $C$ , cujo valor é:

$$C = \frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4}$$

Seguindo o mesmo raciocínio podem ser determinadas as expressões dos coeficientes seguintes. Alguns autores atribuem a LAGRANGE a autoria deste algoritmo. É notável como manipulações algébricas tão simples permitem chegar a conclusões de tão grande alcance. Em [11] podem ser consultados os valores já atrás indicados e mais os quatro seguintes. Em [7] pode ser encontrada uma forma mais sistematizada de determinar os coeficientes da série inversa. E, finalmente, em [pari http://pari.math.u-bordeaux.fr](http://pari.math.u-bordeaux.fr) pode ser encontrado um programa - *serreverse()* - que efectua a inversão das séries.

Estamos agora em condições de inverter as séries de potências encontradas no Capítulo anterior. Vamos começar pela *série V.3.8* que define o comprimento do Arco de Meridiano elíptico a partir da latitude elipsóidica expressa em *radiano*. O resultado encontra-se na *Tabela VI.1.3*.

Devido ao rápido crescimento do valor absoluto dos expoentes decimais dos coeficientes desta série, ela só pode ser processada por compiladores que implementem a aritmética de vírgula flutuante sobre registros de precisão quádrupla (*quad precision*, segundo a nomenclatura do IEEE) ou seja, 128 bits. Assim, vale a pena prescindir *desta vez* da representação em série de potências, e procurar uma representação alternativa. É fácil concluir que existe outra representação para esta função:

- A Latitude Elipsóidica em função do Comprimento do Arco de Meridiano é função inversa de uma função ímpar, logo é – ela própria – ímpar.
- Tal como a função directa, esta função resulta da sobreposição de uma função linear com uma função periódica (conf Fig. VI.1.1). Então, se retirarmos a componente não periódica, poderemos desenvolver a *diferença* em *série de Fourier*, e esta série *só terá termos em seno*.

TABELA VI.1.2. Termos iniciais do cubo de uma série

				$\dots$	$+dx^4$	$+cx^3$	$+bx^2$	$+ax$
			$\times$	$\dots$	$+2(ad+bc)x^5$	$+(b^2+2ac)x^4$	$+2abx^3$	$+a^2x^2$
				$\dots$	$+a^2dx^6$	$+a^2cx^5$	$+a^2bx^4$	$+a^3x^3$
		$\dots$		$+2abdx^7$	$+2abcx^6$	$+2ab^2x^5$	$+2a^2bx^4$	
	$\dots$	$+d(b^2+2ac)x^8$	$+c(b^2+2ac)x^7$		$+b(b^2+2ac)x^6$	$+a(b^2+2ac)x^5$		
$\dots$	$+2d(ad+bc)x^9$	$+2c(ad+bc)x^8$	$+2b(ad+bc)x^7$		$+2a(ad+bc)x^6$			
$\dots$	$+ \dots$	$+ \dots$	$+ \dots$	$+ \dots$	$+(6abc+3a^2d+b^3)x^6$	$+3(ab^2+a^2c)x^5$	$+3a^2bx^4$	$+a^3x^3$

TABELA VI.1.3.  $\varphi(F) = \sum_{i=0}^{21} u_{2i+1} \times F^{2i+1} + o(F^{45})$   $F[\text{m}]$ 

$$\begin{aligned}
\varphi(F) = & 1.578405343477418199203788374679286386216184237336 \times 10^{-7} \cdot F \\
& -1.3218051110162377634090797493112657360116546672461 \times 10^{-23} \cdot F^3 \\
& 6.752231850767647168646956805814409013060978837639 \times 10^{-38} \cdot F^5 \\
& -1.809298477134191470912921040289645430898255962661 \times 10^{-52} \cdot F^7 \\
& 3.765682795559098118839987721003616765268936498751 \times 10^{-67} \cdot F^9 \\
& -8.516788300061488759422938662735208082590978917875 \times 10^{-82} \cdot F^{11} \\
& 2.154778243877441605301165277014045227324723095498 \times 10^{-96} \cdot F^{13} \\
& -5.526135593036900284918698381047767465834680962222 \times 10^{-111} \cdot F^{15} \\
& 1.424222140628872728081765461331645840868018711799 \times 10^{-125} \cdot F^{17} \\
& -3.741101545548001886168999978427535446152120361774 \times 10^{-140} \cdot F^{19} \\
& 9.974917785686046857608501209094587123016230203970 \times 10^{-155} \cdot F^{21} \\
& -2.683389368274489352050354629021170933258409929436 \times 10^{-169} \cdot F^{23} \\
& 7.274749882121573611882369735588794617896307532749 \times 10^{-184} \cdot F^{25} \\
& -1.986462344886630837632377148004919832490263405814 \times 10^{-198} \cdot F^{27} \\
& 5.457079219068021301930865425627669329326128900288 \times 10^{-213} \cdot F^{29} \\
& -1.506766492690256230740597915249224924813261637905 \times 10^{-227} \cdot F^{31} \\
& 4.179018830480306144510312017699167163104498267951 \times 10^{-242} \cdot F^{33} \\
& -1.163654829323804339536658936617297915907094753047 \times 10^{-256} \cdot F^{35} \\
& 3.251598292707922708284520989865494215084450500883 \times 10^{-271} \cdot F^{37} \\
& -9.114394628611411101593699330536366920505725872739 \times 10^{-286} \cdot F^{39} \\
& 2.562006628511042851040806678101426302756824592363 \times 10^{-300} \cdot F^{41} \\
& -7.219986979334129257133179865683317698800936394895 \times 10^{-315} \cdot F^{43}
\end{aligned}$$

A análise desta função em parte não-periódica e parte periódica tem vantagens computacionais importantes. A parte não-periódica reduz-se a um termo linear e conduz-nos ao *Integral Elíptico Completo de Segunda Espécie* que merece uma observação mais atenta.

## VI.2. Parte Aperiódica

Na *Figura VI.2.1* as coordenadas cartesianas de Elipse estão expressas em função de um parâmetro angular que designaremos por *co-latitude reduzida*  $t$ :

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}$$

A cada incremento do ângulo  $\Delta t$  estão associados incrementos das coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \Delta x \approx \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t = a \cos t \cdot \Delta t \\ \Delta y \approx \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = -b \sin t \cdot \Delta t \end{cases}$$

Que definem sobre a tangente um segmento que é uma aproximação do incremento do arco:

$$\begin{aligned}
\Delta s^2 & \approx \Delta x^2 + \Delta y^2 \\
& \approx (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) \Delta t^2 \\
& \approx [a^2 (1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t] \Delta t^2 \\
& \approx (a^2 - a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2 t) \Delta t^2 \\
& \approx a^2 \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t \right) \Delta t^2
\end{aligned}$$

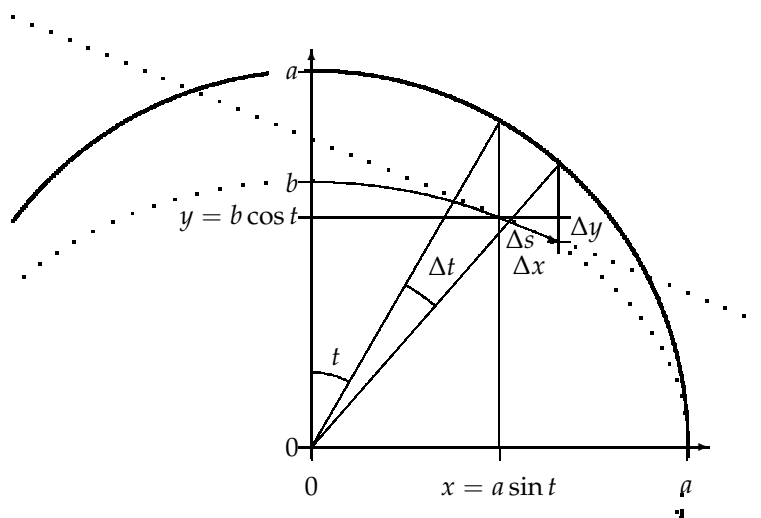


FIGURA VI.2.1. Incremento do Arco de Elipse em função da *co-latitudo reduzida*

Fazendo como anteriormente  $c^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  e introduzindo o *parâmetro*  $m = \varepsilon^2$ :

$$\Delta s \approx a \sqrt{1 - m \sin^2 t} \Delta t$$

obtem-se a expressão incremental do arco. Desta resulta:

$$(VI.2.1) \quad s = a \int_0^{\beta} \sqrt{1 - m \sin^2 t} dt$$

uma forma particular do *Integral Elíptico de Segunda Espécie*.

Abstracção feita ao factor  $a$ , o valor entre zero e  $\frac{\pi}{2}$  é o *Integral Elíptico Completo de Segunda Espécie*, que designaremos por  $E(m) = \mathbb{E}$ . Para o conhecer, poderíamos desenvolver a função integranda de modo idêntico ao que já foi feito no Capítulo IV, quando o arco de Elipse foi expresso em função da *Latitude Elipsóidica*. Tal porém, não será necessário pois o resultado já está determinado antecipadamente. De facto, *depois de fixar os pontos extremos* de um arco, o seu comprimento não depende do parâmetro particular  $r$  usado nas funções coordenadas,  $x(r)$  e  $y(r)$ , mas apenas da *curva descrita* pelo par de coordenadas entre aqueles pontos extremos. Assim, tanto faz que o comprimento do *Quarto de Meridiano* seja expresso em função da *co-latitudo reduzida* como em função da *Latitude Elipsóidica* – *conf eq. V.2.2*:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 t} dt = a(1 - m) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - m \sin^2 \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi = a \cdot E(m)$$

Referindo-nos à *Figura VI.2.2*, à abscissa  $\frac{\pi}{2}$  corresponde – na função  $\frac{E}{a}$  – a ordenada  $\mathbb{E}$ ; na função  $\varphi\left(\frac{E}{a}\right)$ , à abscissa  $\mathbb{E}$  corresponderá a ordenada  $\frac{\pi}{2}$ . A parte linear da *função inversa* será então:

$$\varphi_{\text{parte aperiódica}} = \frac{\pi}{2a\mathbb{E}} F = \frac{F}{a \left(1 - \frac{1}{4}m - \frac{3}{64}m^2 - \frac{5}{256}m^3 - \dots\right)}$$

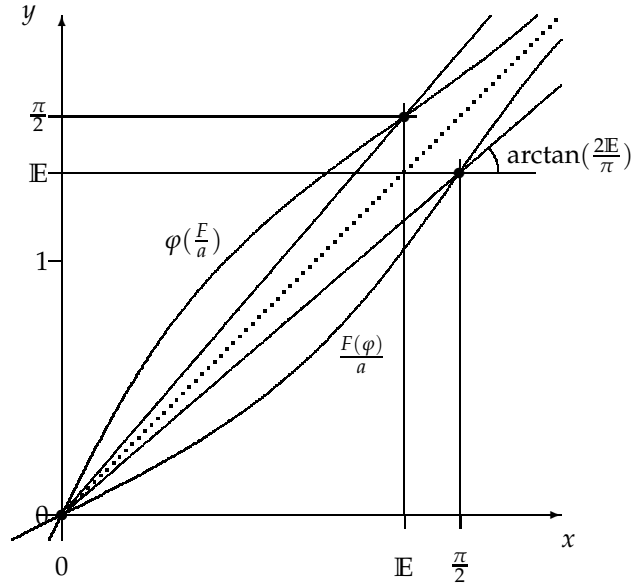


FIGURA VI.2.2. Parte aperiódica

(conf. [8, Equação 12e, página 18]), onde  
(VI.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} = E(m) &= \frac{F(\frac{\pi}{2}, m)}{a} = (1 - m) \left( 1 + \frac{3}{4}m + \frac{45}{64}m^2 + \frac{175}{256}m^3 + \dots \right) \times \frac{\pi}{2} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{4}m - \frac{3}{64}m^2 - \frac{5}{256}m^3 - \dots \right) \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{m}{1} - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{m^2}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{m^3}{5} - \dots \right] \end{aligned}$$

(conf. eq. IV.6.1). A elegante forma final do desenvolvimento de  $\mathbb{E}$  aparece em [12].

À parte não-periódica do desenvolvimento de  $\varphi = F^{-1}$  dá-se por vezes a designação de *latitude rectificante* (conf. [5, par. 3.2.1, pág. 25]), e corresponde numa superfície esférica a uma latitude com idêntica razão entre a *distância meridiana*  $F$  e o *Quarto de Meridiano* (Figura VI.2.3):

$$(VI.2.3) \quad \mu = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(\varphi)}{F(\frac{\pi}{2})} = \varphi_{\text{parte aperiodica}}$$

### VI.3. Parte Periódica

**VI.3.1. Desenvolvimento de Fourier.** O gráfico de uma função inversa obtém-se do gráfico da função directa por uma reflexão pela recta bissectriz do Primeiro Quadrante,  $y = x$  (Figura VI.3.1). Na Secção IV.6 já foi visto que a parte periódica da função directa - Comprimento do Arco de Meridiano - tem o período  $\pi$ . À variação do Arco de zero até  $\pi$  corresponde uma variação da Latitude Elipsóidica desde zero até  $2\mathbb{E}$ , como foi visto na Secção VI.2. Então a parte periódica da função inversa terá um período  $T$  igual a  $2\mathbb{E}$ , a que corresponde uma taxa de variação angular (em radiano/unidade de comprimento do arco) de:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\mathbb{E}}$$

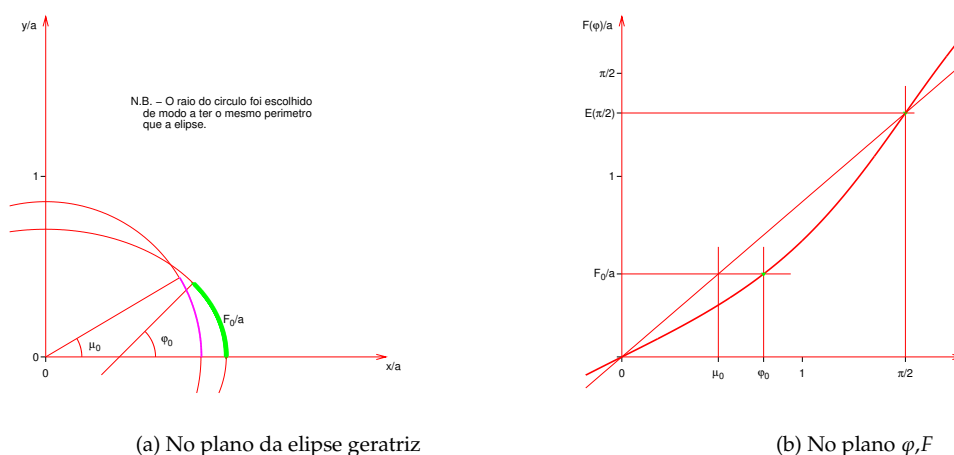


FIGURA VI.2.3. Latitude rectificante.

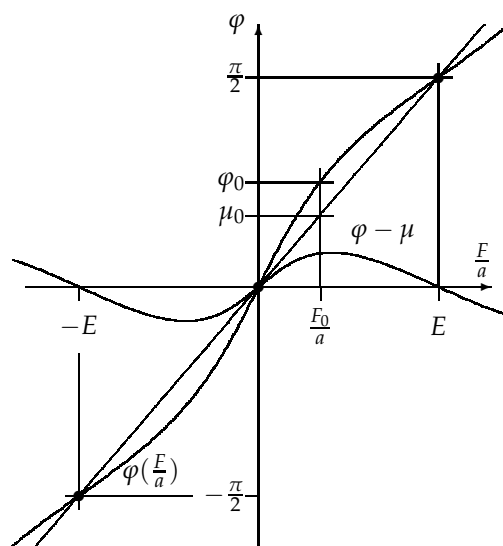


FIGURA VI.3.1. Parte periódica  $\varphi - \mu$

Por outro lado, a função inversa é ímpar tanto como a função directa. Tal significa que a parte periódica só terá admitirá termos em *seno*. Pode concluir-se que a *parte periódica* da função inversa tem a forma geral:

(VI.3.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{parte periódica}}\left(\frac{F}{a}\right) &= b_1 \sin\left[\frac{\pi}{E}\left(\frac{F}{a}\right)\right] + b_2 \sin\left[\frac{2\pi}{E}\left(\frac{F}{a}\right)\right] + b_3 \sin\left[\frac{3\pi}{E}\left(\frac{F}{a}\right)\right] + \dots \\ &= b_1 \sin 2\mu + b_2 \sin 4\mu + b_3 \sin 6\mu + \dots \end{aligned}$$

ficando apenas por conhecer os valores dos coeficientes trigonométricos  $b_n$ .

As componentes sinusoidais da parte periódica, fazendo  $\mathcal{F} = \frac{F}{a}$  e  $\mu = \frac{\pi}{2E}\mathcal{F}$ , determinam-se pela *expressão* VI.3.2 e estão indicadas na *Tabela* VI.3.4.

TABELA VI.3.4.  $\varphi(\mu) - \mu \simeq \sum_{i=1}^6 b_i \sin 2i\mu$  [milirad]

$b_1$	2.5295069149993
$b_2$	0.0037324010941
$b_3$	0.0000075429126
$b_4$	0.0000000173266
$b_5$	0.0000000000427
$b_6$	0.0000000000001

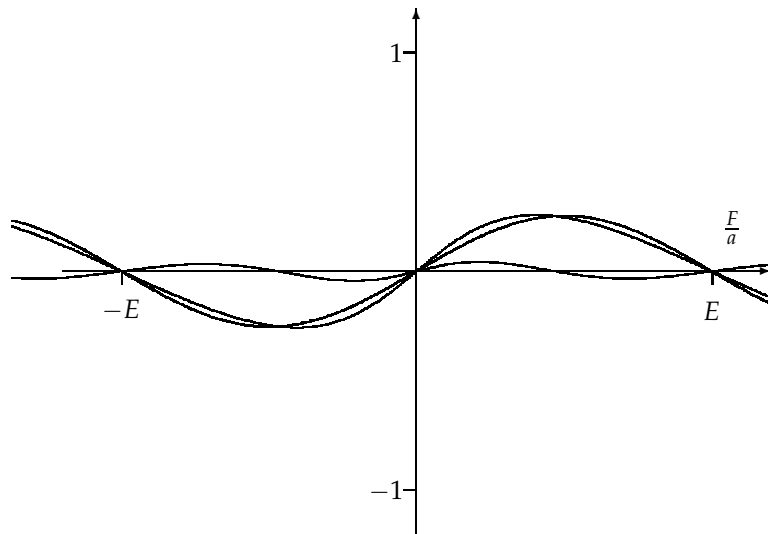


FIGURA VI.3.2. Primeira harmónica

$$(VI.3.2) \quad b_n = \frac{1}{\mathbb{E}} \int_0^{\mathbb{E}} [\varphi(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{F})] \sin 2n\mu(\mathcal{F}) d\mathcal{F}$$

A Figura VI.3.2 mostra a amplitude da primeira harmónica e a função residual após a sua extracção da parte periódica de  $\varphi$ . Pode observar-se a rapidez com que os coeficientes trigonométricos convergem para zero quando cresce a ordem da harmónica (ver [4, Lema do teorema da convergencia, pag 214]). Quando acontece que a função periódica é contínua assim como todas as suas derivadas de qualquer ordem, o desenvolvimento de Fourier é um instrumento de análise numérica de eleição.

**VI.3.2. Factorização e recombinação dos termos.** Temos agora uma expressão da latitude elipsóidica em função da distância meridiana (função inversa) na forma de um desenvolvimento de Fourier. Também no caso da função directa tínhamos uma expressão idêntica, que foi depois convertida num desenvolvimento de potências (série de Taylor); se seguíssemos os passos dados no tratamento da função directa, reencontraríamos a expressão VI.1.3. Mas esta expressão tem uma convergência fraca. Apresentamos agora uma alternativa para a parte periódica, onde é possível reconhecer um factor comum a todos os termos do desenvolvimento.

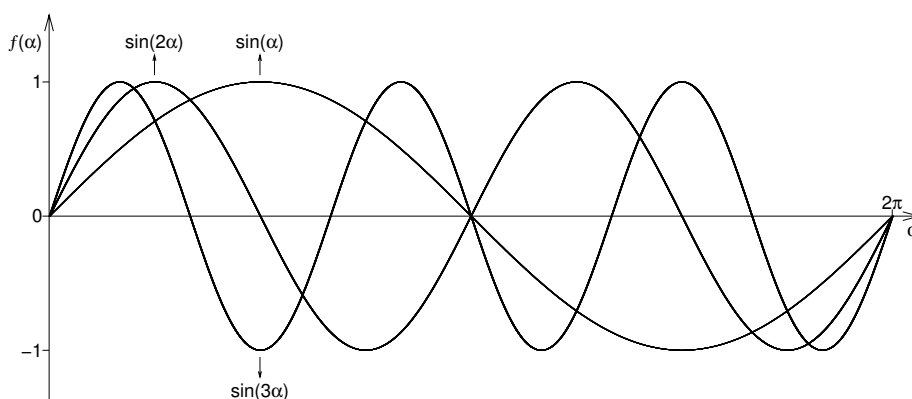


FIGURA VI.3.3. Primeiros senos

Consideremos a família de funções:

$$(VI.3.3) \quad f_k(\omega) = \sin(k\omega) \quad k, \omega \in \mathbb{N}$$

que são a base da representação de Fourier das funções periódicas ímpares (os três primeiros membros estão na *Figura VI.3.3*). Designemos por  $(\alpha, f)$  o plano destas funções.

Apliquemos o plano  $(\alpha, f)$  sobre um cilindro recto de base circular e raio unitário. Reportando-nos à *Figura VI.3.4*, o eixo orientado da esquerda para a direita é o das abcissas ( $\omega/\omega$ ), o que se afasta é o das ordenadas ( $U/U$ ) e o vertical é o das alturas ( $z/z$ ). O eixo dos  $\alpha$ , ao ser aplicado, transforma-se numa circunferência; a origem deste eixo é colocada sobre o ponto  $[1, 0, 0]$  do novo espaço tridimensional e optou-se pelo sentido *anti-horário* para o crescimento de  $\alpha$ .

Consideremos em seguida a projecção ortogonal de cada curva do cilindro sobre um plano axial contendo o eixo dos  $\omega$  (*Figura VI.3.5*). Desta forma promovemos uma transformação do espaço inicial  $(\alpha, f)$ , bidimensional, sobre outro espaço  $(\omega, U)$ , igualmente bidimensional.

Com a orientação indicada, os valores de  $f$  de  $(\alpha, f)$  são replicados sem alterações nas ordenadas do novo espaço  $(\omega, U)$ ,  $U = f$ . As novas abcissas  $\omega$ , porém, relacionam-se com a antiga variável independente  $\alpha$  pela expressão:

$$(VI.3.4) \quad \omega = \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos \omega$$

À primeira função de base de Fourier,  $f_1 = \sin \alpha$ , corresponderá, após a transformação, a função (*Figura VI.3.5*):

$$(VI.3.5) \quad \begin{cases} \omega &= \cos \alpha \\ U &= \sin \alpha \end{cases}$$

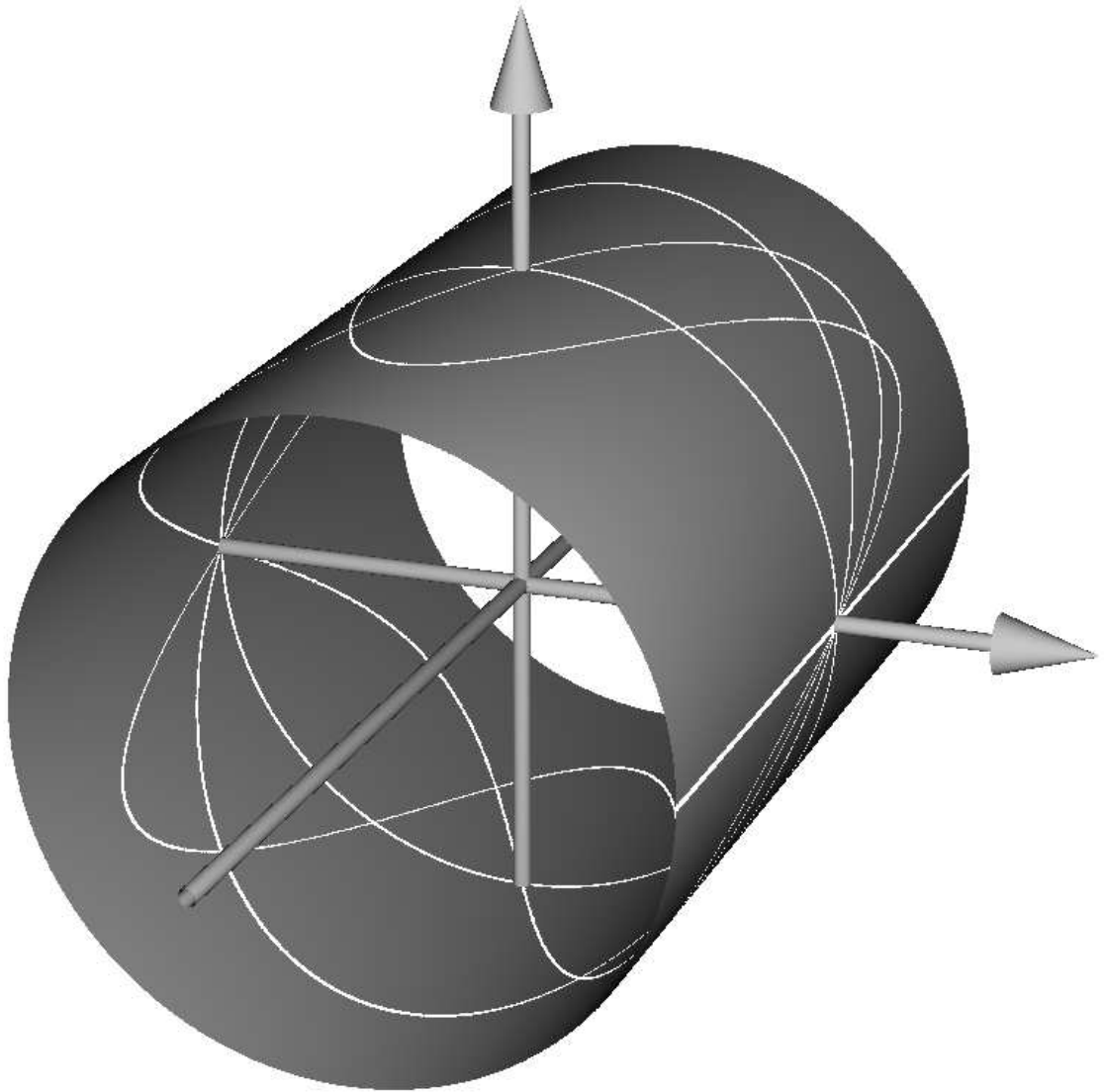
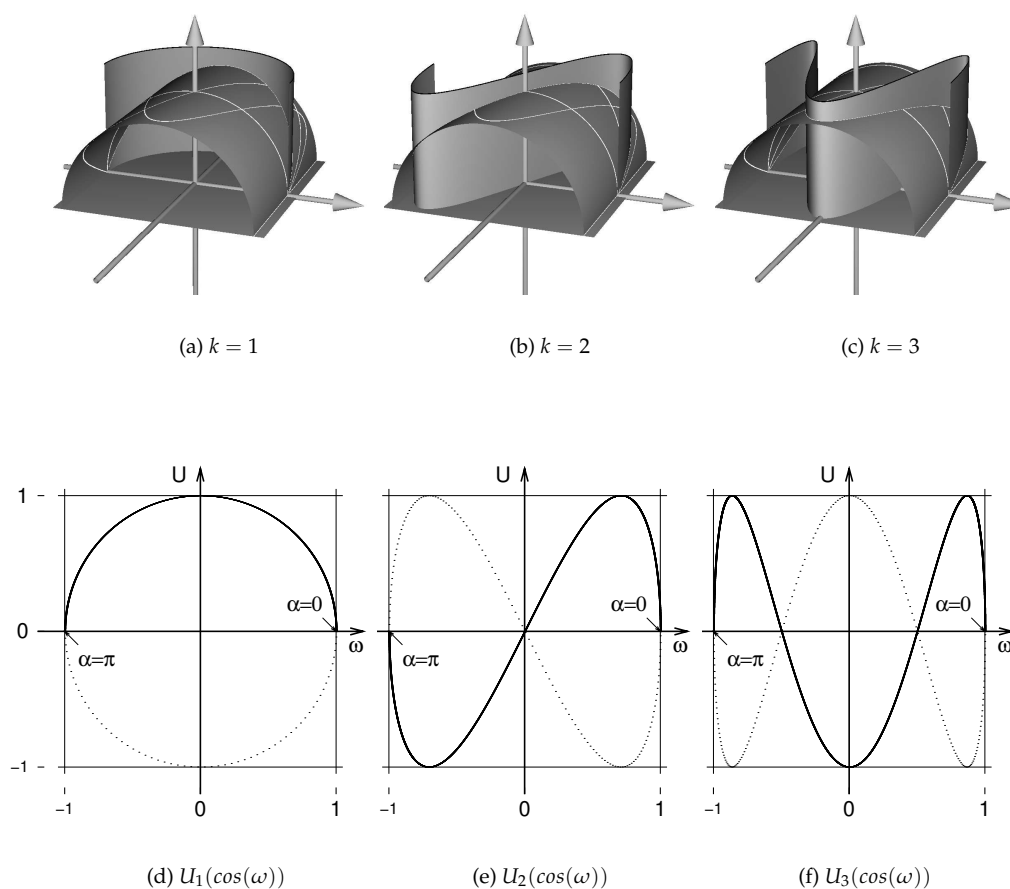


FIGURA VI.3.4. Superfície  $(\alpha, f)$  depois de aplicada a um cilindro

em que o parâmetro  $\alpha$  pode ser eliminado, fazendo:

$$\begin{aligned}
 U &= \sin \alpha \\
 &= \sin (\arccos \omega) \\
 &= \begin{cases} +\sqrt{1 - [\cos (\arccos \omega)]^2} & \leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -\sqrt{1 - [\cos (\arccos \omega)]^2} & \leftrightarrow \pi \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases} \\
 \text{(VI.3.6)} \quad &= \begin{cases} +\sqrt{1 - \omega^2} & \leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -\sqrt{1 - \omega^2} & \leftrightarrow \pi \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{(VI.3.7)} \quad = \begin{cases} +U_1(\omega) & \leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -U_1(\omega) & \leftrightarrow \pi \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases}$$

FIGURA VI.3.5. Transformações de  $\sin(k\alpha) \rightarrow U_k$ 

$U_1(\omega) = +\sqrt{1-\omega^2}$  é tomado com o sinal positivo da raiz, correspondendo à excursão de  $\alpha$  pelo intervalo de 0 a  $\pi$ . Assim,  $U$  fica univocamente definido. Quando  $\alpha$  se situa no intervalo entre  $\pi$  e  $2\pi$ , usa-se  $-U_1(\omega)$ . Esta regra é comum para todos as funções desta família<sup>1</sup>.

À segunda função de base de Fourier,  $f_2 = \sin 2\alpha$ , corresponderá, após a transformação, a função (Figura VI.3.5):

$$(VI.3.8) \quad \begin{cases} \omega = \cos \alpha \\ U = \sin 2\alpha \end{cases}$$

Atendendo a que  $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = (2 \cos \alpha) \sin \alpha$  e às expressões VI.3.5 e VI.3.6,

$$(VI.3.9) \quad U = (2 \cos \alpha) \sin \alpha = 2\omega \sqrt{1-\omega^2} = \pm U_2(\omega)$$

<sup>1</sup>As funções de Tchebitchev também se definem fora do intervalo  $[-1, 1]$ , onde as funções trigonométricas são substituídas pelas suas congêneres hiperbólicas e o radical  $\sqrt{1-\omega^2}$  é substituído por  $\sqrt{\omega^2-1}$ . Neste estudo, porém, restringir-nos-emos ao intervalo mencionado para  $\omega$ .

Usando o mesmo método para a  $f_3 = \sin 3\omega$ , (Figura VI.3.5):

$$(VI.3.10) \quad \begin{cases} \omega = \cos \alpha \\ U = \sin 3\alpha \end{cases}$$

Aplicando novamente a fórmula do seno da soma,

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin (2\alpha + \alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= [(2 \cos \alpha) \sin \alpha] \cos \alpha + [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] \sin \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha + (\cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= (4 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha \\ &= \pm (4\omega^2 - 1) \sqrt{1 - \omega^2} \\ (VI.3.11) \quad &= \pm U_3(\omega) \end{aligned}$$

Em todos os casos foi possível colocar  $\sin \alpha$  em evidência. O factor que multiplica  $\sin \alpha$  é necessariamente uma função par em  $\alpha$ , que assume a forma de um polinómio em  $\cos \alpha$ . Designemos por  $p_k(\cos \alpha)$  estes polinómios. Assim, temos:

$$(VI.3.12) \quad \begin{array}{rcl} p_1(\cos \alpha) & = & 1 \\ p_2(\cos \alpha) & = & 2 \cos \alpha \\ p_3(\cos \alpha) & = & 4 \cos^2 \alpha - 1 \end{array}$$

As expressões para  $\sin 4\alpha$  e seguintes poderia ser obtida aplicando sucessivamente a fórmula do seno da soma. Não é, porém, necessário. As expressões VI.3.12 já encontradas são os três primeiros polinómios de Tchebitchev de segunda espécie (conf. [1]). Esta família de funções é também ortogonal e normada e goza de importantes propriedades. Uma dessas propriedades mais interessantes é a facilidade com que são gerados recursivamente. Repare-se que, fazendo  $\omega = \cos \alpha$ , vem  $p_3 = 2p_2\omega - p_1$ ; se considerássemos  $p_0 = 0$ , poderíamos também obter  $p_2 = 2p_1\omega - p_0$ . Esta lei é geral para a formação dos polinómios desta família (Tabela VI.3.5):

$$(VI.3.13) \quad p_{n+1} = 2p_n\omega - p_{n-1}$$

Outra propriedade é:

$$(VI.3.14) \quad \begin{aligned} \sin(k\alpha) &= U_k(\alpha) \\ &= p_k(\cos \alpha) \sin \alpha \end{aligned}$$

que permite fazer uma ponte entre o desenvolvimento de Fourier e outro desenvolvimento em funções de Tchebitchev de segunda espécie.

Fazendo  $\alpha = 2\mu$  e  $\omega = \cos 2\mu$ , a expressão VI.3.1 pode tomar a nova forma:

$$(VI.3.15) \quad \begin{aligned} \varphi_{\text{parte periodica}}\left(\frac{F}{a}\right) &= b_1 \sin 2\mu + b_2 \sin 4\mu + b_3 \sin 6\mu + \dots \\ &= b_1 U_1(2\mu) + b_2 U_2(2\mu) + b_3 U_3(2\mu) + \dots \\ &= [b_1 p_1(\omega) + b_2 p_2(\omega) + b_3 p_3(\omega) + \dots] \sin 2\mu \end{aligned}$$

A combinação linear de polinómios encerrada nos parêntesis rectos é, ela própria, um novo polinómio na variável  $\omega$ . Designemos por  $P(\omega)$ ; os seus primeiros coeficientes foram calculados e estão apresentados na Tabela VI.3.6. A expressão completa para o cálculo da latitude geodésica em função da distância meridiana é:

$$(VI.3.16) \quad \varphi = \mu + P(\omega) \sin 2\mu$$

TABELA VI.3.5. Polinómios de Tchebitchev de 2ª espécie

											0	= $p_0(\omega)$
											1	= $p_1(\omega)$
										$2\omega$		= $p_2(\omega)$
									$4\omega^2$	-1		= $p_3(\omega)$
									$8\omega^3$	-4 $\omega$		= $p_4(\omega)$
								$16\omega^4$	-12 $\omega^2$	+1		= $p_5(\omega)$
							$32\omega^5$	-80 $\omega^4$	-32 $\omega^3$	+6 $\omega$		= $p_6(\omega)$
				$64\omega^6$						24 $\omega^2$	-1	= $p_7(\omega)$
			$128\omega^7$	-448 $\omega^6$						-8 $\omega$		= $p_8(\omega)$
		$256\omega^8$	-1024 $\omega^7$	+672 $\omega^5$						+10 $\omega$	+1	= $p_9(\omega)$
	$512\omega^9$	-2304 $\omega^8$	+1792 $\omega^6$	-560 $\omega^4$						+10 $\omega$	-1	= $p_9(\omega)$
	1024 $\omega^{10}$	-5120 $\omega^9$	+4608 $\omega^7$	-1792 $\omega^5$						+60 $\omega^2$	-1	= $p_{10}(\omega)$
$2048\omega^{11}$									$280\omega^3$	-12 $\omega$		= $p_{11}(\omega)$

TABELA VI.3.6.  $P(\omega)$  [rad]

$$\begin{aligned}
 P(\omega) = & 2.09698617204162 \times 10^{-17} \omega^6 + \\
 & + 3.51273981458073 \times 10^{-15} \omega^5 + \\
 & + 6.82767271975592 \times 10^{-13} \omega^4 + \\
 & + 1.38609619938685 \times 10^{-10} \omega^3 + \\
 & + 3.01711383572021 \times 10^{-8} \omega^2 + \\
 & + 7.46473288222299 \times 10^{-6} \omega + \\
 & + 2.52949937212941 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

com  $\mu = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F}{F(\frac{\pi}{2})}$  e  $\omega = \cos 2\mu$ . Esta expressão da latitude é mais rápida de calcular.

## Bibliografia

- [1] André Angot. *Compléments de Mathématiques*, volume 1 of *Collection Technique et Scientifique du CNET*, paragraph VII, pages 483–494. Masson et Cie, Paris, 5<sup>e</sup> edition, 30 September 1965. Polynomes de Tchebichev.
- [2] José António de Deus Alves; João José Sousa Cruz; Custódio Guerreiro Norte. *Manual de Topografia*, pages 118–118. Ponto Central.
- [3] José António de Deus Alves; João José Sousa Cruz; Custódio Guerreiro Norte. *Manual de Topografia*, volume 1 of *Academia Militar*, paragraph III, pages 133–133. PF, Lisboa, 1<sup>e</sup> edition, 30 September 1988. Latitude 38°.
- [4] Demidovich and Maron. *Computational Mathematics*, chapter 6.3. MIR Publishers, 1976.
- [5] Gerald I. Evenden. A comprehensive library of cartographic projection functions. In *libproj4*. <http://www.members.verizon.net>, 2005.
- [6] Arthur H. Robinson; Joel L. Morrison; Phillip C. Muercke; A. Jon Kimerling; Stephen C. Guptill. *Elements of Cartography*, paragraph 4, pages 45–45. John Wiley & Sons, Inc., New York, sixth edition, 1995. Table 4.2 Official Ellipsoids.
- [7] Donald Ervin Knuth. *The Art of Computer Programming - Seminumerical Algorithms*, volume 2 of *Computer Science and Information Processing*, paragraph 4.7, pages 508–514. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 2<sup>nd</sup> edition, 6 July 1980. Reversion of series.
- [8] Thomas H. Meyer. Grid, ground and globe: Distances in the gps era. In *Surveying and Land Information Science*. University of California Riverside (?), 2002.
- [9] Alexander Ostrovsky. *Funções de uma variável*, volume 1 of *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, paragraph II.35, pages 99–99. Fundação Calouste Gulbenkian, Avenida de Berna, Lisboa, 2<sup>a</sup> edition, 11 November 1969. Séries infinitas. Alguns critérios de convergência.
- [10] I. Bronstein; K. Semendiaev. *Manual de Matemática para Engenheiros e Estudantes*, paragraph I.1, pages 135–137. Editora Mir, Moscou, 1979. Parte 2, Cálculo aproximado.
- [11] Milton Abramowitz; Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, volume 1 of *Dover Books on Advanced Mathematics*, paragraph 3.6.25, pages 16–16. Dover Publications, Inc., 180 Varick Street, New York, 9<sup>th</sup> edition, 12 December 1972. Reversion of series.
- [12] Milton Abramowitz; Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, volume 1 of *Dover Books on Advanced Mathematics*, paragraph 17.3.12, pages 591–591. Dover Publications, Inc., 180 Varick Street, New York, 9<sup>th</sup> edition, 12 December 1972. Complete Elliptic Integral of the Second Kind.
- [13] Júlio Rey Pastor; Pedro Pi Caleja; César A. Trejo. *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables. Aplicaciones.*, volume 2 of *Análisis matemático*, paragraph XX.77, pages 324–324. Editorial KAPELUSZ, Moreno 372, Buenos Aires, séptima edition, 10 January 1969. Excelente abordagem da Projecção de Gauss-Kruger.



## Índice

Arco de Meridiano, 50

calotes polares, 36

coeficientes binomiais generalizados, 14, 15

comprimento do arco, 13, 26, 27, 34, 36, 40, 42

distância meridiana, 27, 54

Elipsóide Internacional, 44

erro absoluto, 36

erro relativo, 37

excentricidade, 24, 27, 28, 30, 34

fórmula de Euler, 20

fórmula de Mac-Laurin, 14

fórmula de Taylor, 45

funções inversas, 47

funções de Tchebitchev de 2a espécie, 60

IEEE, 50

Integral Elíptico de Segunda Espécie, 52, 53

Lagrange, inversão da série, 50

latitude elipsóidica, 13, 28, 30, 36, 37, 50, 53

latitude rectificante, 54

latitude reduzida, 52, 53

Leibnitz, critério de convergência, 39

Meridiano Central, 42, 44

Meridiano de Greenwich, 44

parâmetro  $m$ , 53

polinômios de Tchebitchev de 2a espécie, 60

Ponto Central, 44, 45

Portugal Continental, 44, 45

precisão, 36, 50

Quarto de Meridiano, 53, 54

raio de curvatura, 13, 30, 45

raio equatorial, 33

recíproco do achatamento, 33

série binomial, 14

série de potências, 45

semi-eixo de rotação, 33

sistema natural, 42

sistema sexagesimal, 42

triângulo de Pascal, 14, 15, 20, 21

Universal Transverse Mercator, 44



## APÊNDICE A

### Exemplo de programa fonte

```
/* File Taylor.c */
/* Taylor Expansion of the Meridian around the Central Point */
/* Antonio Ferrao */
/* Portela February 13, 2005 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

/* International Elipsoid */
const double a=6378388.0;

const double M0[]={ 4.3925934331545755301238365e6,
                    1.1103136587767734291629302e5,
                    9.6282515206628903523920442e0,
                    2.2028451467414027319872600e-2,
                    -9.7297606516698653210344140e-4,
                    -1.5048404894409786478056095e-6,
                    3.8742711419855002400222275e-8,
                    6.2385187632243768829471414e-11/*,
                    -7.7220743477664562973189409e-13,
                    -2.2982899997598446546166998e-15,
                    6.2263443642770577961026412e-18,
                    7.7930175678987282215494813e-20*/};

/* WGS84 EGM96 Elipsoid */
const double a1=6378137.0;
const double M1[]={ 6.3354393272928200308382082536805993731827e6,
                    2.1205919130691710270028600583321139072905e4,
                    -4.1347134656125489013438935608724590059948e3,
                    3.5381605835295595761647242527395983721717e2,
                    -1.1068576401098555514768750044832485087421e1,
                    -7.5259955340472929573133188105389073940953e-1,
                    1.1687284593333493467473263094287526147538e-1,
                    -6.3185166506495134285535502025346539334063e-3,
                    -5.4412580680862395754678977770194835083333e-5,
                    3.8863605374754071684521556977092049935343e-5,
                    -3.2084251693356224072535750913284731245437e-6,
                    7.5626128682789967426100152510919340646379e-8,
                    1.1109878084634255328985966575403315916708e-8,
                    -1.4487290349494131744137893182615076769003e-9,
                    7.0070414592895146416629802829570288020989e-11,
```

```

1.8511244510252270615957865548540494677905e-12,
-5.7705942046353061656717641360478513160556e-13,
4.2912127293227996452107954685039008818884e-14,
-6.3119296903838330137813998382509251687294e-16,
-1.9254043510606167741590241186161803573115e-16,
2.1728166478804308121045636121658593615032e-17,
-9.0063712065417318776585020723016452353105e-19,
-4.3989128230988098373284004306154546714215e-20,
9.4740784626499674472806914531328336636672e-21,
-6.2994401024533824449621036343500830296782e-22,
2.9133940302354896522296182988453414910962e-24,
3.4836721534605918872247331910172895283589e-24,
-3.4613610952673559921453033139560720091588e-25,
1.1835728035729754026495977173850492700498e-26,
9.5640907838071186058422086769935430376007e-28,
-1.6150694574636124653742205134934086646845e-28,
9.5366369209556486086960195050026654962520e-30,
6.8801592504253496209536390587144267989813e-32};

const double b[6]={ 2.5295069149993,
                    0.0037324010941,
                    0.0000075429126,
                    0.0000000173266,
                    0.000000000427,
                    0.000000000001};

const double P[7]={ 2.52949937212941e-3,
                    7.46473288222299e-6,
                    3.01711383572021e-8,
                    1.38609619938685e-10,
                    6.82767271975592e-13,
                    3.51273981458073e-15,
                    2.09698617204162e-17};

double horner(double x)
{
    double *c=(double *)&M0+sizeof(M0)/sizeof(double)-1;
    double res=*c;
    for (;c-M0;res+*--c) res*=x;
    return res;
}

double horner1(double x)
{
    double *c=(double *)&M1+sizeof(M1)/sizeof(double)-1;
    double res=*c;
    for (;c-M1;res+*--c) res*=x;
    return res;
}

```

```
double horner2(double x)
{
    double *c=(double *)&P+sizeof(P)/sizeof(double)-1;
    double res=*c;
    for (;c-P;res+*--c) res*=x;
    return res;
}

double mu(double x)
{
    const double K=1.57043696386315688994094410029850891580760e-7;
    return K*x;
}

double phi(double x)
{
    int i;
    double m=mu(x);
    double s=0;
    for (i=0;
        i<sizeof(b)/sizeof(double);
        i++)
        s+=b[i]*sin(m*2*(i+1));
    return m+s/1000;
}

double phi2(double x)
{
    double m=mu(x);
    double m2=m*2;
    return m+horner2(cos(m2))*sin(m2);
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    const double RAD2SEC=206264.80624709635515664691;
    double latitude;
    double meriddist;
    double meriddist1;
    double seconds;
    int minutes,degrees;

    int i;
    for(i=-30;i<31;i++)
    {
        latitude=((double)i)/6;
        meriddist=horner(latitude);
        meriddist1=horner1(latitude);
        seconds=(phi(meriddist))*RAD2SEC;
```

```
degrees=(int) floor(seconds/3600);
seconds-=((double) degrees)*3600;
minutes=(int) floor(seconds)/60;
seconds-=((double) minutes)*60;
printf("%5d g%5d m%25.12f%25.12f%5d g%5d m%25.12f\n",
        i/6,
        10*(i%6),
        meriddist*0.9996,
        meriddist1,
        degrees,minutes,seconds);
}
printf("\n\n\n");
for(i=-30;i<31;i++)
{
    latitude=((double)i)/6;
    meriddist=horner(latitude);
    seconds=(phi2(meriddist))*RAD2SEC;
    degrees=(int) floor(seconds/3600);
    seconds-=((double) degrees)*3600;
    minutes=(int) floor(seconds)/60;
    seconds-=((double) minutes)*60;
    printf("%5d g%5d m%25.12f%25.12f%5d g%5d m%25.12f\n",
            i/6,
            10*(i%6),
            meriddist,
            degrees,minutes,seconds);
}
return 0;
}
```