

Projecção de Gauß-Krüger

António Ferrão

RESUMO. A Projecção de Gauß-Krüger é desenvolvida passo a passo com pormenor suficiente para se implementar uma rotina de cálculo em C ou PASCAL.

Introdução

A Projecção de Gauß-Krüger é tema incontornável para quem trabalhe com cartas topográficas em Portugal. Os profissionais de Rádio estão neste grupo.

Há cerca de dez anos, resolvi criar uma rotina para calcular as coordenadas do mapa, sendo conhecidas as coordenadas geográficas. Este texto pode ser encarado como os apontamentos tomados na altura.

O primeiro problema a resolver é o de assumir a latitude elipsóidica ou geodésica como variável independente.

Lisboa, Dezembro de 2001

António Ferrão
antonio@ferrao.org

Desenho de funções: *gnuplot*.

Precisão múltipla: *gmp*.

Composição Tipográfica: L^AT_EX, L^AT_EX.

Parte A

A Latitude Elipsóidica

Conteúdo

Introdução	3
Parte A. A Latitude Elipsóidica	5
Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
Capítulo I. Tangente à Elipse	13
I.1. Tangente à circunferência	13
I.2. Tangente à Elipse	16
I.3. Tangentes aos extremos do mesmo diâmetro	18
I.4. Diâmetro paralelo às tangentes	19
I.5. Semi-diâmetros conjugados	22
I.6. Distância do centro à tangente	24
Capítulo II. Normal à Elipse	25
II.1. Equação geral	25
II.2. Intersecções com os eixos coordenados	26
II.3. Sub-Normal e sub-Tangente	26
II.4. Comprimento da normal	27
II.5. Relações notáveis com a normal	29
II.6. Distância polar da tangente em função do seu ângulo polar	30
II.7. Normal em função do ângulo com o eixo das abcissas	31
II.8. Curvatura	34
Capítulo III. Latitude elipsóidica	37
III.1. Definição	37
III.2. Primeira derivada da abcissa em ordem à latitude elipsóidica	39
III.3. Primeira derivada da ordenada em ordem à latitude elipsóidica	40
III.4. Declive da tangente em função da latitude elipsóidica	40
III.5. Segunda derivada da abcissa em função da latitude elipsóidica	41
III.6. Segunda derivada da ordenada em ordem à latitude elipsóidica	42
III.7. Raio de curvatura da Elipse em função da latitude elipsóidica	42
Bibliografia	47
Índice	49

Lista de Figuras

I.1.1	A tangente como limite das secantes com um ponto fixo	14
I.1.2	Secante e tangente à circunferência	15
I.2.1	Secante e tangente à elipse	16
I.3.1	Diâmetro	18
I.3.2	Tangentes nos extremos do diâmetro	19
I.4.1	Conjugado do diâmetro conjugado	21
I.4.2	Diâmetros conjugados	21
I.4.3	Diâmetro paralelo às tangentes no <i>Cardióide</i>	22
I.5.1	Soma dos quadrados dos <i>semi-diâmetros conjugados</i> .	23
I.6.1	Produto dos semi-eixos.	24
II.1.1	Normal à Elipse	25
II.3.1	<i>Sub-normal</i> e <i>sub-tangente</i>	27
II.4.1	<i>Normal prolongada</i>	28
II.5.1	Quadrado do <i>semi-diâmetro conjugado</i>	29
II.5.2	Quadrado do <i>semi-eixo menor</i>	30
II.6.1	Ângulo polar da tangente	31
II.6.2	Função $\Delta(\varphi)$ em $[0, \pi]$	32
II.7.1	<i>Normal</i> em função do ângulo com o eixo das abcissas	32
II.7.2	Função $n(\varphi)$ em $[0, \pi]$	33
II.7.3	<i>Normal prolongada</i> em função do ângulo com o eixo das abcissas	33
II.7.4	Função $n'(\varphi)$ em $[0, \pi]$	34
III.1.1	Definição de <i>latitude elipsóidica</i> .	37
III.1.2	Abcissa e ordenada da Elipse em função da latitude elipsóidica	38
III.1.3	Funções $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$ em $[0, \pi]$	39
III.4.1	Funções $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ e $\frac{y'}{x'}$ em $[0, \pi]$	41
III.4.2	Declive da tangente	41
III.7.1	Função $M(\varphi)$ em $[0, \pi]$	44
III.7.2	<i>Círculo osculador</i> de raio mínimo	44
III.7.3	<i>Círculo osculador</i> de raio máximo	45
III.7.4	Raio de curvatura $M(\varphi)$ e função $\Delta(\varphi)$ em $[0, \pi]$	45
III.7.5	Lugar geométrico dos <i>centros de curvatura</i> .	46

Lista de Tabelas

I.4.1	Extremos do diâmetro paralelo às tangentes	20
-------	--	----

Tangente à Elipse

I.1. Tangente à circunferência

Partindo da equação da recta definida por dois pontos \mathcal{P} e q :

$$(I.1.1) \quad \frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = \frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q}$$

sejam $\mathcal{P} \equiv (X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$ um ponto fixo e $q = (x_q, y_q)$ um ponto genérico, ambos pertencentes à circunferência de raio R e centro na origem do sistema de coordenadas (FIGURAS I.1.1 e I.1.2). Nestas condições (conf. [3]):

$$\begin{cases} X_{\mathcal{P}}^2 + Y_{\mathcal{P}}^2 = R^2 \\ x_q^2 + y_q^2 = R^2 \end{cases}$$

$$X_{\mathcal{P}}^2 + Y_{\mathcal{P}}^2 = x_q^2 + y_q^2$$

$$X_{\mathcal{P}}^2 - x_q^2 = y_q^2 - Y_{\mathcal{P}}^2$$

$$(X_{\mathcal{P}} + x_q)(X_{\mathcal{P}} - x_q) = (y_q + Y_{\mathcal{P}})(y_q - Y_{\mathcal{P}})$$

$$\frac{y_q - Y_{\mathcal{P}}}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = \frac{X_{\mathcal{P}} + x_q}{y_q + Y_{\mathcal{P}}}$$

$$\frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = -\frac{X_{\mathcal{P}} + x_q}{Y_{\mathcal{P}} + y_q}$$

a recta (I.1.1) toma a forma particular:

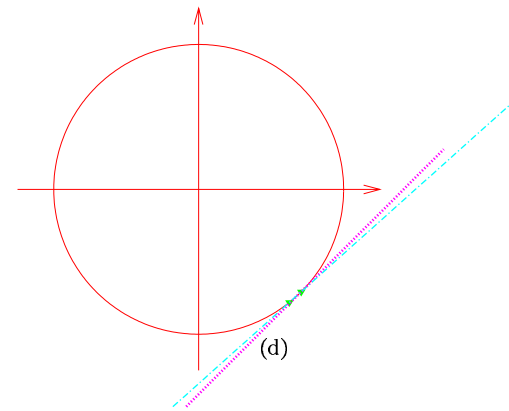
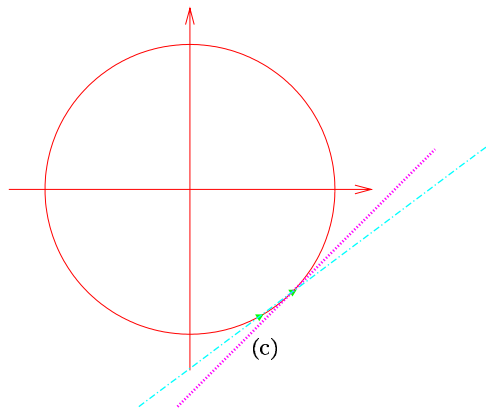
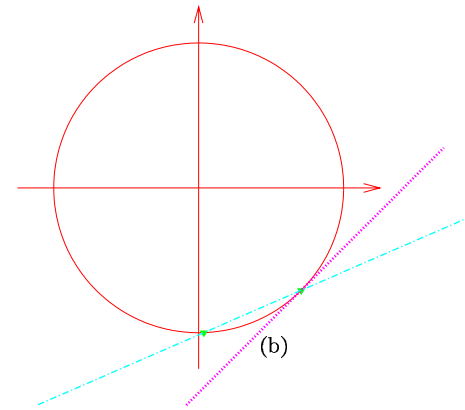
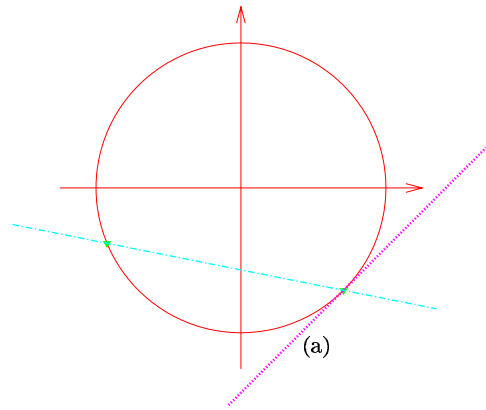
$$\frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = \frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = -\frac{X_{\mathcal{P}} + x_q}{Y_{\mathcal{P}} + y_q}$$

a recta secante tornar-se-á tangente no *limite* da aproximação:

$$q(X_{\mathcal{P}} + \Delta_x, Y_{\mathcal{P}} + \Delta_y) \longrightarrow \mathcal{P}(X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$$

$$\frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = \frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = -\frac{X_{\mathcal{P}} + (X_{\mathcal{P}} + \Delta_x)}{Y_{\mathcal{P}} + (Y_{\mathcal{P}} + \Delta_y)} = -\frac{2X_{\mathcal{P}} + \Delta_x}{2Y_{\mathcal{P}} + \Delta_y}$$

FIGURA I.1.1. A tangente como limite das secantes com um ponto fixo



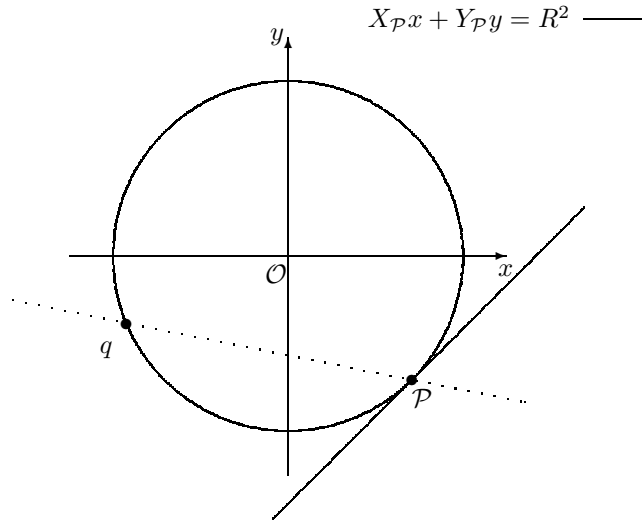


FIGURA I.1.2. Secante e tangente à circunferência

$$\lim_{q \rightarrow P} \frac{y - Y_P}{x - X_P} = -\frac{X_P}{Y_P}$$

$$(y - Y_P) Y_P = -X_P (x - X_P)$$

$$Y_P y - Y_P^2 = -X_P x + X_P^2$$

$$X_P x + Y_P y = X_P^2 + Y_P^2$$

$$X_P x + Y_P y = R^2$$

a última equação representa a *tangente à circunferência* no ponto \mathcal{P} . A equação reduzida deduz-se dela:

$$\frac{X_P}{R^2} x + \frac{Y_P}{R^2} y = 1$$

Se o centro da circunferência fôr um ponto arbitrário do plano $\mathcal{C} \equiv (X_C, Y_C)$, a equação será:

$$(X_P - X_C)(x - X_C) + (Y_P - Y_C)(y - Y_C) = R^2$$

$$b^2 X_{\mathcal{P}} x + a^2 Y_{\mathcal{P}} y = (ab)^2 \quad \text{---}$$

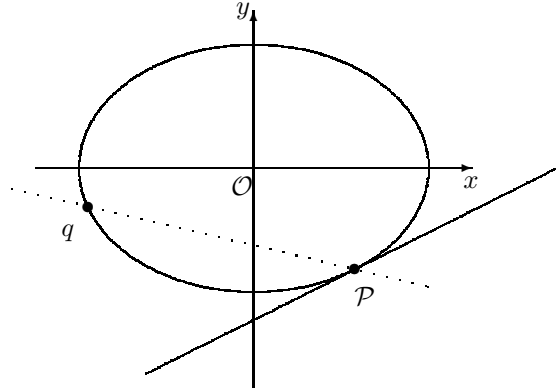


FIGURA I.2.1. Secante e tangente à elipse

I.2. Tangente à Elipse

Seguindo o método da Secção I.1, (x, y) será uma recta \overline{Pq} se (FIGURA I.2.1):

$$\frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = \frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q}$$

e P e q estarão sobre a Elipse se satisfizerem a equação reduzida:

$$(I.2.1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{X_{\mathcal{P}}^2}{a^2} + \frac{Y_{\mathcal{P}}^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_q^2}{a^2} + \frac{y_q^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{\mathcal{P}}^2}{a^2} + \frac{Y_{\mathcal{P}}^2}{b^2} = \frac{x_q^2}{a^2} + \frac{y_q^2}{b^2}$$

$$b^2 X_{\mathcal{P}}^2 + a^2 Y_{\mathcal{P}}^2 = b^2 x_q^2 + a^2 y_q^2$$

$$b^2 (X_{\mathcal{P}}^2 - x_q^2) = a^2 (y_q^2 - Y_{\mathcal{P}}^2)$$

$$b^2 (X_{\mathcal{P}} - x_q) (X_{\mathcal{P}} + x_q) = a^2 (y_q - Y_{\mathcal{P}}) (y_q + Y_{\mathcal{P}})$$

$$\frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{X_{\mathcal{P}} + x_q}{Y_{\mathcal{P}} + y_q}$$

retomando a equação da recta,

$$\frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = \frac{Y_{\mathcal{P}} - y_q}{X_{\mathcal{P}} - x_q} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{X_{\mathcal{P}} + x_q}{Y_{\mathcal{P}} + y_q}$$

e quando $q \rightarrow \mathcal{P}$ obtém-se a equação da tangente à Elipse:

$$\frac{y - Y_{\mathcal{P}}}{x - X_{\mathcal{P}}} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{2X_{\mathcal{P}}}{2Y_{\mathcal{P}}} = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{X_{\mathcal{P}}}{Y_{\mathcal{P}}}$$

$$a^2 Y_{\mathcal{P}} (y - Y_{\mathcal{P}}) = -b^2 X_{\mathcal{P}} (x - X_{\mathcal{P}})$$

$$a^2 Y_{\mathcal{P}} y - a^2 Y_{\mathcal{P}}^2 = -b^2 X_{\mathcal{P}} x + b^2 X_{\mathcal{P}}^2$$

$$b^2 X_{\mathcal{P}} x + a^2 Y_{\mathcal{P}} y - (b^2 X_{\mathcal{P}}^2 + a^2 Y_{\mathcal{P}}^2) = 0$$

A expressão entre parêntesis é uma *constante*, pois se verifica que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

é verdade para todos os pontos da Elipse, em particular para \mathcal{P} . Finalmente:

$$(I.2.2) \quad b^2 X_{\mathcal{P}} x + a^2 Y_{\mathcal{P}} y - (ab)^2 = 0$$

é a equação geral da tangente à Elipse no ponto \mathcal{P} . Desta, deduz-se a equação reduzida:

$$(I.2.3) \quad \frac{X_{\mathcal{P}}}{a^2} x + \frac{Y_{\mathcal{P}}}{b^2} y = 1$$

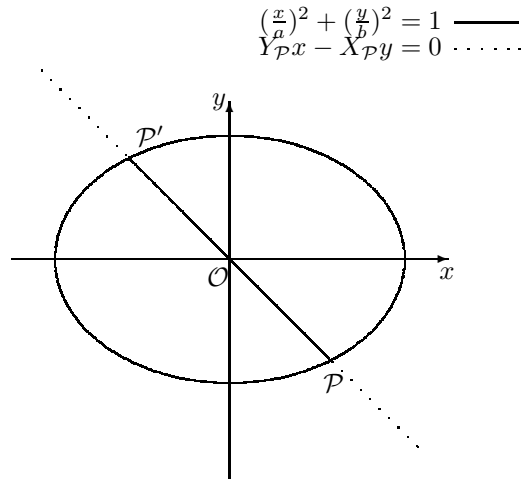


FIGURA I.3.1. Diâmetro

I.3. Tangentes aos extremos do mesmo diâmetro

Seja $\mathcal{P} \equiv (X_P, Y_P)$ um ponto pré-estabelecido da Elipse de centro \mathcal{C} suposto na origem do plano de coordenadas. \mathcal{C} e \mathcal{P} são dois pontos do diâmetro no ponto \mathcal{P} . A equação da recta que contém o diâmetro pode determinar-se aplicando a eq. (I.1.1):

$$\frac{y - Y_P}{x - X_P} = \frac{Y_P - 0}{X_P - 0} = \frac{Y_P}{X_P}$$

que é equivalente a (FIGURA I.3.1):

$$(I.3.1) \quad Y_P x - X_P y = 0$$

O outro extremo do mesmo diâmetro é o simétrico de \mathcal{P} relativamente ao centro de coordenadas, ou seja, $(-X_P, -Y_P)$. Pode verificar-se por substituição que satisfaz (I.3.1) e também (I.2.1).

Seja $\mathcal{P}' = (X_{P'}, Y_{P'}) = (-X_P, -Y_P)$ o segundo extremo do diâmetro. Então, a tangente à Elipse neste ponto será (conf eq I.2.2):

$$b^2 X_{P'} x + a^2 Y_{P'} y - (ab)^2 = 0$$

que, expressa nas coordenadas do ponto inicial, toma a forma:

$$-b^2 X_P x - a^2 Y_P y - (ab)^2 = 0$$

equação esta equivalente a:

$$(I.3.2) \quad b^2 X_P x + a^2 Y_P y + (ab)^2 = 0$$

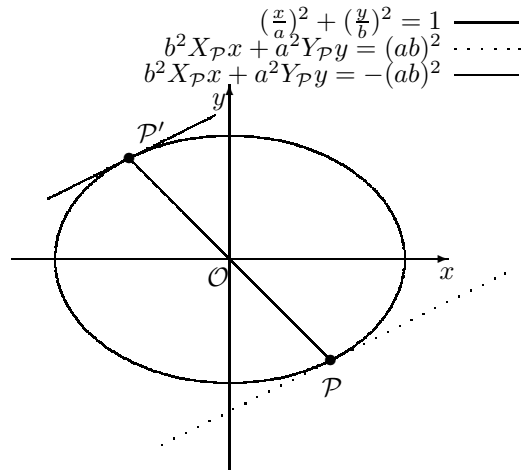


FIGURA I.3.2. Tangentes nos extremos do diâmetro

A intersecção das rectas tangentes nos dois extremos do mesmo diâmetro é determinada pelo sistema:

$$\begin{cases} b^2 X_P x + a^2 Y_P y - (a^2 b^2) = 0 \\ b^2 X_{P'} x + a^2 Y_{P'} y + (a^2 b^2) = 0 \end{cases}$$

Por simples inspecção se verifica que as duas equações são em tudo idênticas excepto no sinal do termo independente. Pode concluir-se que as duas tangentes são *paralelas* e que ocupam posições *simétricas* relativamente ao centro da Elipse (FIGURA I.3.2).

I.4. Diâmetro paralelo às tangentes

A recta paralela à tangente que passa pelo centro de coordenadas $O \equiv (0,0)$ obtem-se da equação (I.2.2), anulando o termo independente:

$$(I.4.1) \quad b^2 X_P x + a^2 Y_P y = 0$$

Ver-se-á em seguida que esta passagem de um diâmetro para outro que é paralelo às tangentes nos seus extremos, ao ser aplicada segunda vez ao resultado, reconduz-nos ao *diâmetro original*. Para isso:

- (1) Determina-se os extremos do diâmetro paralelo às tangentes;
- (2) Selecciona-se um desses extremos e determina-se a tangente à Elipse que o contém;
- (3) Determina-se a recta central paralela à tangente no extremo seleccionado;
- (4) Verifica-se se essa recta passa pelo ponto original.

TABELA I.4.1. Extremos do diâmetro paralelo às tangentes

Diâmetro inicial	$(X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$	$(-X_{\mathcal{P}}, -Y_{\mathcal{P}})$
Diâmetro paralelo às tangentes	$(\frac{a}{b}Y_{\mathcal{P}}, -\frac{b}{a}X_{\mathcal{P}})$	$(-\frac{a}{b}Y_{\mathcal{P}}, \frac{b}{a}X_{\mathcal{P}})$

Começando pela determinação dos extremos do diâmetro paralelo às tangentes, estes resultam da intersecção da Elipse com a recta que contém o centro e é paralela à tangente:

$$(I.4.2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \forall (x, y) \in \text{elipse}$$

Na equação (I.4.1) exprima-se y em função de x :

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{X_{\mathcal{P}}}{Y_{\mathcal{P}}} x$$

substituindo o valor encontrado em (I.4.2):

$$\frac{1}{a^2} x^2 + \frac{1}{b^2} \times \left(\frac{b^4}{a^4} \times \frac{X_{\mathcal{P}}^2}{Y_{\mathcal{P}}^2} \right) x^2 = 1$$

$$(a^2 Y_{\mathcal{P}}^2 + b^2 X_{\mathcal{P}}^2) x^2 = a^4 Y_{\mathcal{P}}^2 \quad b^2 x + a^2 y \equiv a^2 b^2 \forall (x, y) \in \text{elipse}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} Y_{\mathcal{P}}^2 \implies x = \pm \frac{a}{b} Y_{\mathcal{P}}$$

De modo idêntico se determina a ordenada $y = \mp \frac{b}{a} X_{\mathcal{P}}$. A TABELA I.4.1 resume os cálculos dos extremos.

Seja agora $\mathcal{Q} = (X_{\mathcal{Q}}, Y_{\mathcal{Q}})$ um extremo do diâmetro paralelo tangente, por exemplo $(\frac{a}{b}Y_{\mathcal{P}}, -\frac{b}{a}X_{\mathcal{P}})$. A tangente à Elipse neste ponto é dada pela equação (I.2.2):

$$b^2 X_{\mathcal{Q}} x + a^2 Y_{\mathcal{Q}} y - (ab)^2 = 0$$

e a recta paralela a esta tangente que passa pelo centro tem a equação:

$$b^2 X_{\mathcal{Q}} x + a^2 Y_{\mathcal{Q}} y = 0$$

substituindo nesta última $X_{\mathcal{Q}}$ e $Y_{\mathcal{Q}}$ pelas coordenadas do ponto original, obtém-se:

$$b^2 \frac{a}{b} Y_{\mathcal{P}} x - a^2 \frac{b}{a} X_{\mathcal{P}} y = 0$$

equivalente a:

$$Y_{\mathcal{P}} x - X_{\mathcal{P}} y = 0$$

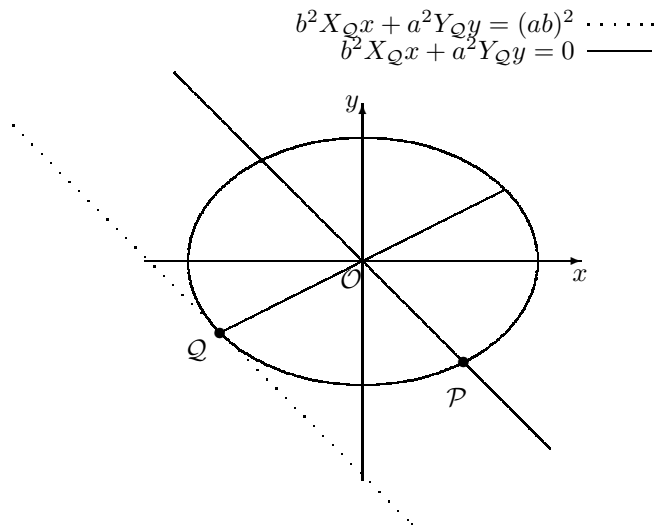


FIGURA I.4.1. Conjugado do diâmetro conjugado

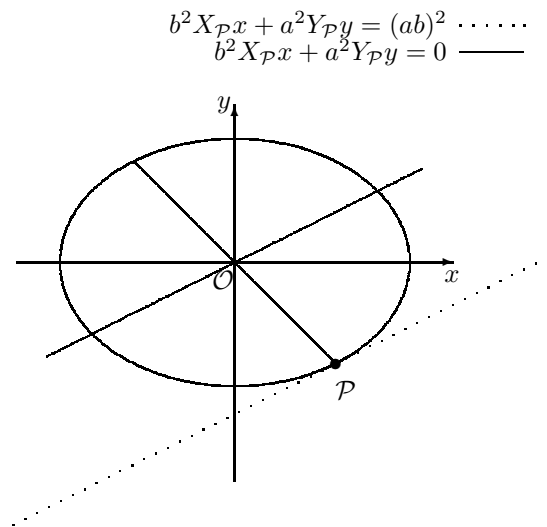


FIGURA I.4.2. Diâmetros conjugados

Esta última é a recta central que passa por (X_P, Y_P) (conf. I.3.1) , ou seja, que contém o diâmetro original, o que completa a demonstração (FIGURA I.4.1).

Cabe agora introduzir uma definição formal:

DEFINITION. Dado um diâmetro da Elipse, chama-se *diâmetro conjugado* ao diâmetro paralelo às tangentes nos pontos extremos (FIGURA I.4.2).

FIGURA I.4.3. Diâmetro paralelo às tangentes no *Cardióide*

O conceito de *diâmetro conjugado na Elipse* é introduzido por [3], mas não é certo que se mantenha na Pedagogia moderna. Apesar da óbvia colisão semântica com um conceito diferente dos números complexos, iremos explorá-lo, já que dele se podem inferir directamente algumas relações que serão usadas no estudo da normal.

É-nos permitido, a partir de agora, falar em par de *diâmetros conjugados* (no plural). Pode verificar-se que esta propriedade está longe de ser extensível a outras curvas. Basta tentar identificar diâmetros conjugados no *Cardióide*, por exemplo (FIGURA I.4.3).

O conjugado do diâmetro máximo da Elipse é o diâmetro mínimo e – só neste caso – os diâmetros conjugados são *perpendiculares*.

I.5. Semi-diâmetros conjugados

Considere-se novamente um ponto $\mathcal{P} = (X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$ da Elipse e designemos por $\vec{\rho}$ o vector central $\overrightarrow{\mathcal{OP}}$ e por ρ a distância de \mathcal{P} ao centro \mathcal{O} ou *semi-diâmetro*.

$$(I.5.1) \quad \rho = \left| \overrightarrow{\mathcal{OP}} \right| = \sqrt{X_{\mathcal{P}}^2 + Y_{\mathcal{P}}^2}$$

Esta distância pode exprimir-se apenas em função da abcissa x , a partir da equação da Elipse. Para isso isola-se $Y_{\mathcal{P}}^2$:

$$\frac{X_{\mathcal{P}}^2}{a^2} + \frac{Y_{\mathcal{P}}^2}{b^2} = 1$$

$$(I.5.2) \quad Y_{\mathcal{P}}^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - X_{\mathcal{P}}^2)$$

substituindo depois este valor no semi-diâmetro (I.5.1):

$$\rho^2 = X_{\mathcal{P}}^2 + Y_{\mathcal{P}}^2 = b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) X_{\mathcal{P}}^2 = b^2 + \varepsilon^2 X_{\mathcal{P}}^2$$

Introduziu-se aqui uma nova expressão:

$$(I.5.3) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

designada *primeira excentricidade* da Elipse.

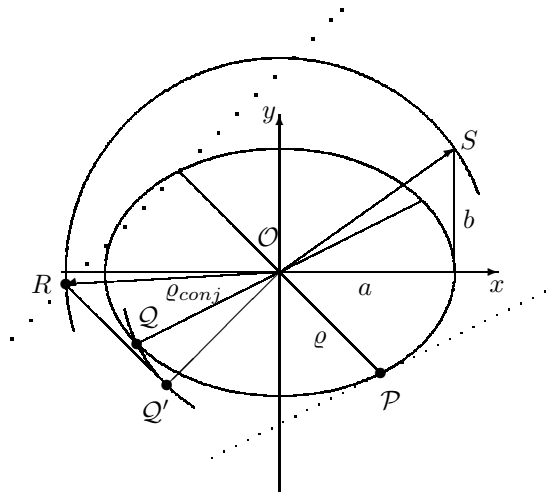


FIGURA I.5.1. Soma dos quadrados dos *semi-diâmetros conjugados*.

Seja ρ_{conj} o semi-diâmetro conjugado de ρ . Usando as coordenadas da TABELA I.4.1 e a expressão (I.5.2),

$$\begin{aligned}
 \rho_{conj}^2 &= X_{P'}^2 + Y_{P'}^2 \\
 &= \frac{a^2}{b^2} Y_P^2 + \frac{b^2}{a^2} X_P^2 \\
 &= \frac{a^2}{b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} (a^2 - X_P^2) \right] + \frac{b^2}{a^2} X_P^2 \\
 &= a^2 - X_P^2 + \frac{b^2}{a^2} X_P^2 \\
 &= a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) X_P^2 \\
 &= a^2 - \varepsilon^2 X_P^2
 \end{aligned}$$

Adicionando agora os quadrados dos dois semi-diâmetros conjugados, obtem-se:

$$\rho^2 + \rho_{conj}^2 = b^2 + \varepsilon^2 X_P^2 + a^2 - \varepsilon^2 X_P^2 = a^2 + b^2$$

que não depende do ponto escolhido. Em conclusão, *a soma dos quadrados de dois quaisquer semi-diâmetros conjugados da Elipse é constante*.

A FIGURA I.5.1 ilustra esta propriedade. ρ_{conj} é o conjugado de ρ . O ângulo $\angle OQ'R$ é recto com lados iguais aos semi-diâmetros conjugados. A hipotenusa \overline{OR} é igual à formada com os semi-diâmetros principais a e b , \overline{OS} . Note-se o facto de os semi-diâmetros conjugados da Elipse manterem esta relação – tão característica de triângulos rectângulos – apesar de não formarem *em geral* ângulos rectos, como acontece com a circunferência.

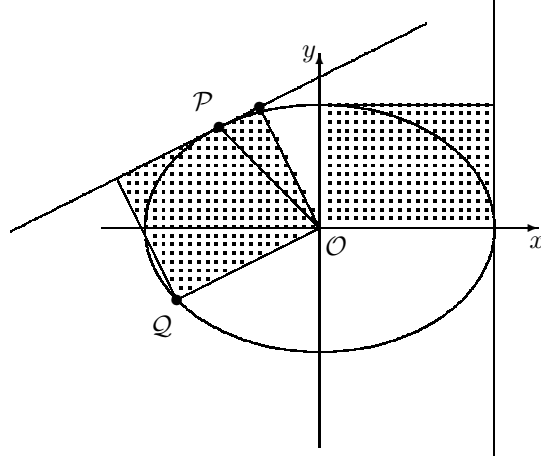


FIGURA I.6.1. Produto dos semi-eixos.

I.6. Distância do centro à tangente

Tomando novamente a equação da recta tangente que passa por um ponto \mathcal{P} (eq. I.2.2):

$$b^2 X_{\mathcal{P}} x + a^2 Y_{\mathcal{P}} y - (ab)^2 = 0$$

e igualando os termos semelhantes aos da equação geral da recta, $Ax + By + C = 0$,

$$\begin{cases} A = b^2 X_{\mathcal{P}} \\ B = a^2 Y_{\mathcal{P}} \\ C = -a^2 b^2 \end{cases}$$

determina-se a distância à origem das coordenadas, que também é o centro da Elipse, por:

$$p^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2} = \frac{a^2 b^2}{\frac{b^2}{a^2} X_{\mathcal{P}}^2 + \frac{a^2}{b^2} Y_{\mathcal{P}}^2}$$

finalmente, (conf. TABELA I.4.1) – designando o semi-diâmetro conjugado por ϱ_{conj} :

$$(I.6.1) \quad p^2 = \frac{a^2 b^2}{\varrho_{conj}^2} \implies p^2 \varrho_{conj}^2 = a^2 b^2 \implies p \varrho_{conj} = ab$$

ou seja, *o produto da distância da tangente ao centro pelo semi-diâmetro conjugado é constante* (Figura I.6.1). Quando o ponto de partida \mathcal{P} é a extremidade do semi-eixo maior a , o semi-diâmetro conjugado ϱ_{conj} é o semi-eixo menor b .

Normal à Elipse

II.1. Equação geral

Considerando novamente na Elipse um ponto fixo $\mathcal{P} = (X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$ e a tangente que o contém (Figura II.1.1):

$$\frac{X_{\mathcal{P}}}{a^2}x + \frac{Y_{\mathcal{P}}}{b^2}y = 1$$

Pode usar-se os coeficientes de x e y da equação da tangente para construir outra equação de uma recta que lhe seja perpendicular e que passe também por $\mathcal{P} = (X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}})$. O resultado será:

$$(II.1.1) \quad \frac{Y_{\mathcal{P}}}{b^2}(x - X_{\mathcal{P}}) = \frac{X_{\mathcal{P}}}{a^2}(y - Y_{\mathcal{P}})$$

(Note-se que os coeficientes que afectam as variáveis foram trocados, e que o sinal de um deles foi invertido). Para passar à forma geral da equação da normal II.1.1, faz-se:

$$\frac{a^2}{X_{\mathcal{P}}}(x - X_{\mathcal{P}}) = \frac{b^2}{Y_{\mathcal{P}}}(y - Y_{\mathcal{P}})$$

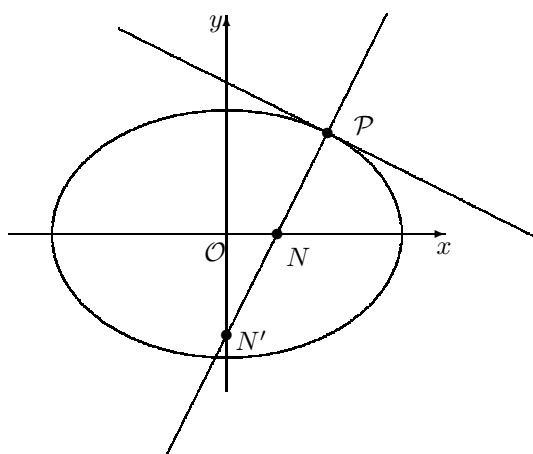


FIGURA II.1.1. Normal à Elipse

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{X_{\mathcal{P}}}x - a^2 &= \frac{b^2}{Y_{\mathcal{P}}}y - b^2 \\ \frac{a^2}{X_{\mathcal{P}}}x - \frac{b^2}{Y_{\mathcal{P}}}y &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

e, chamando c^2 a $a^2 - b^2$, virá:

$$(II.1.2) \quad \frac{a^2}{X_{\mathcal{P}}}x - \frac{b^2}{Y_{\mathcal{P}}}y - c^2 = 0$$

II.2. Intersecções com os eixos coordenados

Deduzem-se da equação II.1.2.

Intersecção com o eixo das abcissas: Fazendo primeiro $y = 0$,

$$\frac{a^2}{X_{\mathcal{P}}}x = c^2 \Rightarrow x = \frac{c^2}{a^2}X_{\mathcal{P}} = \varepsilon^2 X_{\mathcal{P}}$$

pois $\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ é a *primeira excentricidade* da Elipse. Ao ponto com esta abcissa e ordenada nula chamar-se-á N .

Intersecção com o eixo das ordenadas: Com $x = 0$,

$$-\frac{b^2}{Y_{\mathcal{P}}}y = c^2 \Rightarrow y = -\frac{c^2}{b^2}Y_{\mathcal{P}} = -\varepsilon'^2 Y_{\mathcal{P}}$$

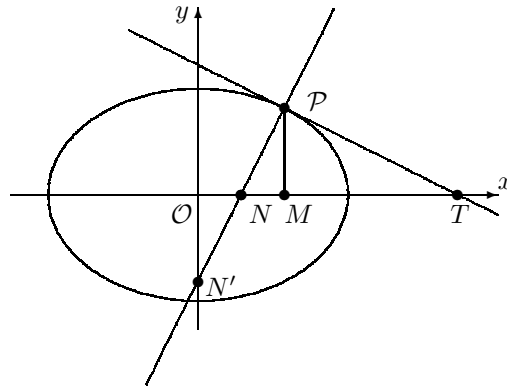
Aqui introduziu-se uma nova constante $\varepsilon'^2 = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, designada *segunda excentricidade* da Elipse. O ponto de coordenadas $(0, -\varepsilon'^2 Y_{\mathcal{P}})$ será designado por N' (Figura II.1.1).

II.3. Sub-Normal e sub-Tangente

Sub-Normal. É o segmento \overline{NM} (Figura II.3.1):

$$\begin{aligned}\overline{NM} &= \overline{OM} - \overline{ON} \\ &= X_{\mathcal{P}} - \varepsilon^2 X_{\mathcal{P}} \\ &= \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) X_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a^2} X_{\mathcal{P}} \\ &= \frac{b^2}{a^2} X_{\mathcal{P}}\end{aligned}$$

Observe-se que a recta normal *divide o segmento da abcissa em dois segmentos cuja razão é constante*.

FIGURA II.3.1. *Sub-normal e sub-tangente*

Sub-Tangente. É o segmento \overline{MT} (Figura II.3.1):

$$\overline{MT} = \overline{OT} - \overline{OM}$$

Sendo T a intersecção da tangente com o eixo das abcissas, obtém-se a partir da equação geral da tangente (*conf. I.3.2*)

$$\frac{X_P}{a^2}x + \frac{Y_P}{b^2}y = 1$$

fazendo $y = 0$

$$\frac{X_P}{a^2}x = 1$$

do que resulta:

$$x = \frac{a^2}{X_P} = \overline{OT}$$

Finalmente, substituindo

$$\overline{MT} = \frac{a^2}{X_P} - X_P = \frac{a^2 - X_P^2}{X_P}$$

II.4. Comprimento da normal

É o comprimento do segmento \overline{PN} (Figura II.3.1):

$$\begin{aligned} \overline{PN}^2 &= \overline{PM}^2 + \overline{MN}^2 \\ &= Y_P^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}X_P\right)^2 \\ &= Y_P^2 + \frac{b^4}{a^4}X_P^2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{b^2}Y_P^2 + \frac{b^2}{a^2}X_P^2\right) \end{aligned}$$

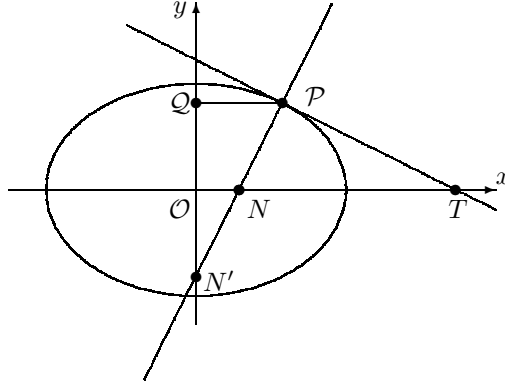


FIGURA II.4.1. Normal prolongada

sendo a última expressão entre parêntesis o *quadrado do semi-diâmetro conjugado* (conf Tabela I.4.1)

$$\overline{\mathcal{P}N}^2 = \frac{b^2 \cdot \varrho_{conj}^2}{a^2}$$

$$(II.4.1) \quad \overline{\mathcal{P}N} = \frac{b\varrho_{conj}}{a}$$

a esta grandeza chamar-se-á simplesmente *normal à Elipse no ponto P* e será designada por n .

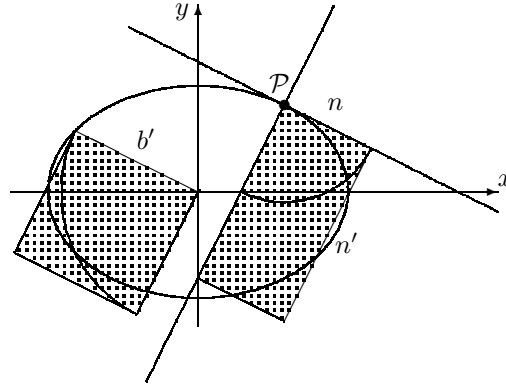
De forma idêntica se pode ver que (Figura II.4.1) :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}N'}^2 &= \overline{\mathcal{P}Q}^2 + \overline{\mathcal{Q}N'}^2 \\ &= X_{\mathcal{P}}^2 + (\overline{\mathcal{Q}O} + \overline{ON'})^2 \\ &= X_{\mathcal{P}}^2 + \left[Y_{\mathcal{P}} - \left(-\frac{c^2}{b^2} Y_{\mathcal{P}} \right) \right]^2 \\ &= X_{\mathcal{P}}^2 + \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right)^2 Y_{\mathcal{P}}^2 \\ &= X_{\mathcal{P}}^2 + \left(\frac{b^2 + a^2 - b^2}{b^2} \right)^2 Y_{\mathcal{P}}^2 = X_{\mathcal{P}}^2 + \frac{a^4}{b^4} Y_{\mathcal{P}}^2 \\ &= \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{a^2} X_{\mathcal{P}}^2 + \frac{a^2}{b^2} Y_{\mathcal{P}}^2 \right) \end{aligned}$$

ou seja:

$$(II.4.2) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{P}N'}^2 &= \frac{a^2 \varrho_{conj}^2}{b^2} \\ \overline{\mathcal{P}N'} &= \frac{a\varrho_{conj}}{b} \end{aligned}$$

Ao comprimento do segmento $\overline{\mathcal{P}N'}$ que se pode definir para cada ponto \mathcal{P} da Elipse também se dá o nome de *normal prolongada* e será referido adiante por n' .

FIGURA II.5.1. Quadrado do *semi-diâmetro conjugado*

II.5. Relações notáveis com a normal

De II.4.1 e II.4.2 retira-se:

$$(II.5.1) \quad \overline{\mathcal{P}\mathcal{N}} \cdot \overline{\mathcal{P}\mathcal{N}'} = \frac{b\varrho_{conj}}{a} \times \frac{a\varrho_{conj}}{b} = \varrho_{conj}^2$$

O produto dos comprimentos dos segmentos definidos na recta normal pelas intersecções com os eixos coordenados, por uma lado, e com tangente, por outro é igual ao quadrado do semi-diâmetro conjugado (Figura II.5.1).

Chamando agora p à distância do centro \mathcal{O} à tangente (Figura II.5.2), obtêm-se outra relação:

$$n = \overline{\mathcal{P}\mathcal{N}} = \frac{b\varrho_{conj}}{a}$$

(conf. II.4.1) e

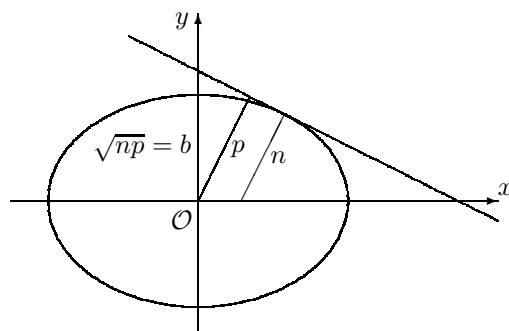
$$p = \frac{ab}{\varrho_{conj}}$$

(conf. I.6.1)

$$(II.5.2) \quad np = \frac{b\varrho_{conj}}{a} \times \frac{ab}{\varrho_{conj}} = b^2$$

o produto da normal pela distância do centro à tangente é constante. Quando o ponto da Elipse considerado \mathcal{P} é uma extremidade do eixo menor, a normal e a distância da tangente ao centro são iguais.

Outra forma de exprimir esta relação é a seguinte: o semi-eixo menor é a média geométrica da normal e da distância polar da tangente, qualquer que seja o ponto da Elipse escolhido.

FIGURA II.5.2. Quadrado do *semi-eixo menor*

II.6. Distância polar da tangente em função do seu ângulo polar

Partindo agora da forma reduzida da equação da tangente à Elipse (*conf. I.2.3*),

$$\frac{X_{\mathcal{P}}}{a^2}x + \frac{Y_{\mathcal{P}}}{b^2}y = 1$$

e convertendo esta à forma polar:

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y = p$$

obtemos sucessivamente:

$$\frac{X_{\mathcal{P}}}{a^2} = \frac{\cos \varphi}{p} \wedge \frac{Y_{\mathcal{P}}}{b^2} = \frac{\sin \varphi}{p}$$

$$X_{\mathcal{P}} = \frac{\cos \varphi}{p}a^2 \wedge Y_{\mathcal{P}} = \frac{\sin \varphi}{p}b^2$$

Atendendo a que

$$\frac{X_{\mathcal{P}}^2}{a^2} + \frac{Y_{\mathcal{P}}^2}{b^2} = 1$$

pois $\mathcal{P} \equiv [X_{\mathcal{P}}, Y_{\mathcal{P}}]$ pertence também à Elipse (Figura II.6.1) ,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{p^2} a^4 \right) + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{p^2} b^4 \right) = 1$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = p^2$$

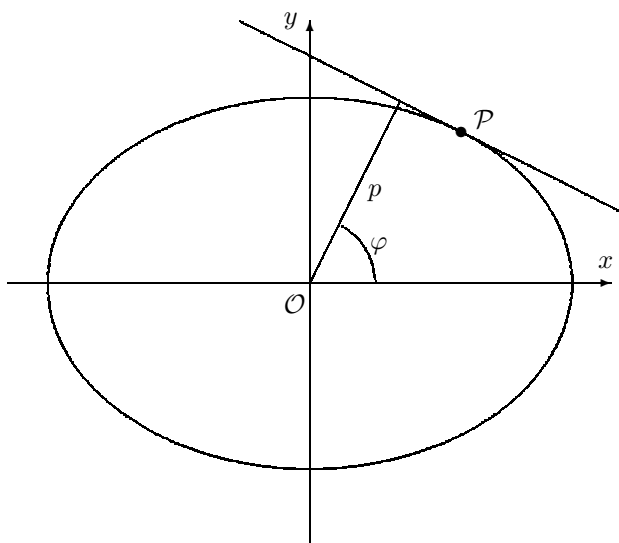


FIGURA II.6.1. Ângulo polar da tangente

$$\begin{aligned}
 (II.6.1) \quad p &= \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \varphi) + a^2 (1 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi} \\
 &= a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= a \cdot \Delta(\varphi)
 \end{aligned}$$

Nesta determinação da distância polar foi considerada a definição da *primeira excentricidade* da Elipse (I.5.3) e introduziu-se uma nova função,

$$(II.6.2) \quad \Delta(\varphi) = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$$

conhecida como *amplitude delta* (Figura II.6.2).

II.7. Normal em função do ângulo com o eixo das abcissas

Das relações II.5.2 e II.6.1 obtém-se (Figura II.7.1):

$$(II.7.1) \quad \overline{NP} = n = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{a\Delta(\varphi)} = \frac{a \frac{b^2}{a^2}}{\Delta(\varphi)} = \frac{a \left(\frac{a^2 - a^2 + b^2}{a^2} \right)}{\Delta(\varphi)} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\Delta(\varphi)}$$

(ver Figura II.7.2).

Tal como a *normal* $n = \overline{NP}$, também a *normal prolongada* $n' = \overline{N'P}$ (Figura II.7.3) pode exprimir-se em função do ângulo com o eixo das abcissas. De II.5.1, obtêm-se:

$$n' = \overline{N'P} = \frac{\varrho_{conj}^2}{n}$$

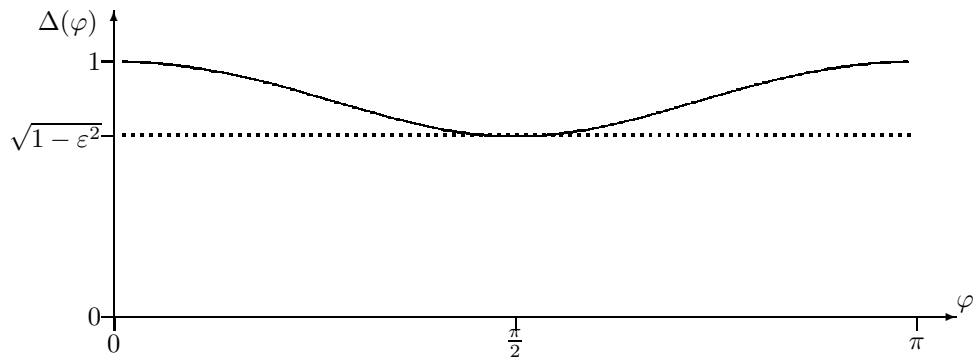
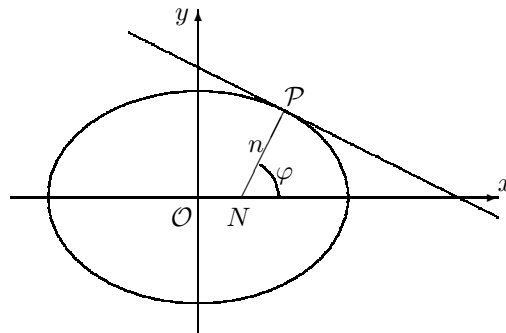
FIGURA II.6.2. Função $\Delta(\varphi)$ em $[0, \pi]$ 

FIGURA II.7.1. Normal em função do ângulo com o eixo das abscissas

mas também de II.4.1 se retira:

$$\rho_{conj} = \frac{a \cdot n}{b}$$

do que se conclui:

$$n' = \frac{\frac{a^2 n^2}{b^2}}{n} = \frac{a^2}{b^2} n = \frac{a^2 a (1 - e^2)}{b^2 \Delta(\varphi)}$$

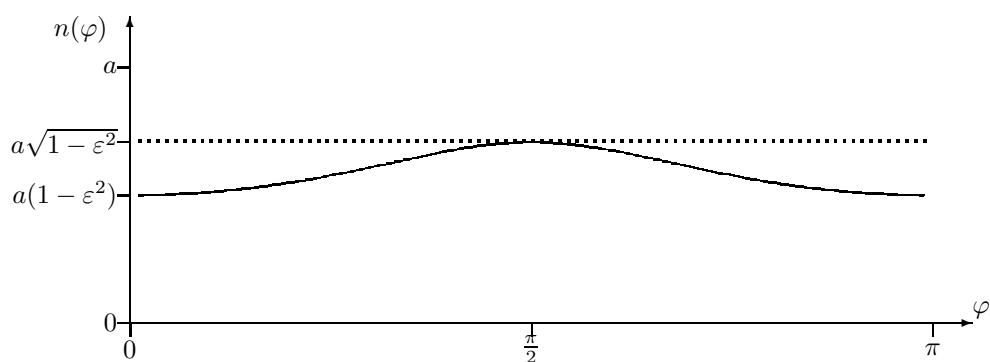


FIGURA II.7.2. Função $n(\varphi)$ em $[0, \pi]$

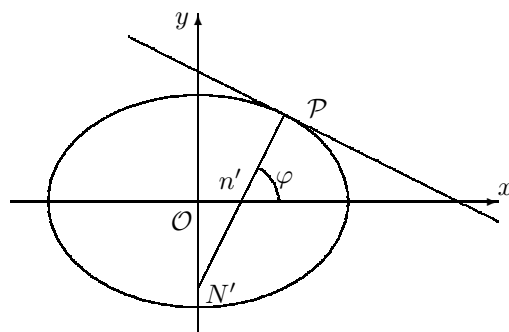
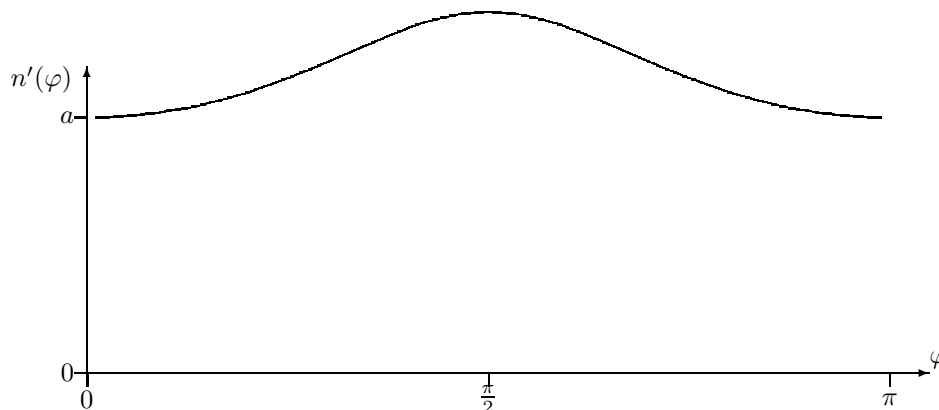


FIGURA II.7.3. Normal prolongada em função do ângulo com o eixo das abcissas

Lembrando que $a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$,

$$(II.7.2) \quad n' = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{b^2}{a\Delta(\varphi)} = \frac{a}{\Delta(\varphi)} = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

(ver Figura II.7.4).

FIGURA II.7.4. Função $n'(\varphi)$ em $[0, \pi]$

II.8. Curvatura

Façamos agora um parêntesis na Elipse, para observarmos um conceito intimamente relacionado com a normal. Segundo [1]:

curvatura: é a derivada do ângulo da tangente em ordem ao *comprimento do arco*:

$$(II.8.1) \quad \kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

Note-se, desde já, que é indiferente tomar a variação do declive da tangente ou da normal, pois as duas são sempre perpendiculares. Sejam quais forem as funções f e g que descrevem as coordenadas ortonormais x e y relativamente a um *parâmetro comum* t ,

$$(II.8.2) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

o *incremento elementar do arco* define-se, a menos de um infinitésimo de ordem superior, pela regra de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &\approx \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \Delta s^2 &\approx \left(\frac{dx}{dt}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\Delta t\right)^2 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Como α é uma função de t e t é uma função de s ,

$$\kappa = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

Por outro lado:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

que, ao ser derivada segunda vez, origina:

$$\sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Substituindo nesta última

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ toma a forma:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

resultando para κ o valor:

$$(II.8.3) \quad \kappa = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

O recíproco da curvatura é o *raio de curvatura*. Estas grandezas gozam de propriedades especiais, entre as quais a de serem invariantes com o parâmetro que descreve as coordenadas e também com as operações de translacção e rotação, isto é, são *características* da curva na vizinhança de cada ponto. Também permitem definir o círculo osculador à curva, para uma aproximação de segunda ordem.

CAPÍTULO III

Latitude elipsóidica

III.1. Definição

A *latitude elipsóidica* vem definida em qualquer livro de especialidade. Cite-se primeiro [4]:

“La altura del polo sobre el horizonte (siendo este el plano normal a la vertical del lugar).”

Em [2] pode ler-se:

“Latitude on the ellipsoid is called **geodetic latitude**. We define geodetic latitude as the angle formed by the line from the equator toward the center of the earth, and a second line perpendicular to the ellipsoid surface at one’s location”.

As duas definições são equivalentes (*Figura III.1.1*). Fazendo coincidir o eixo yy' com o eixo de rotação de modo a que a origem das ordenadas fique sobre o Centro da Terra, o eixo xx' fica sobre o Equador. A estrela simboliza a direcção do eixo de revolução da Terra, que aponta para próximo da Estrela Polar. A direcção normal

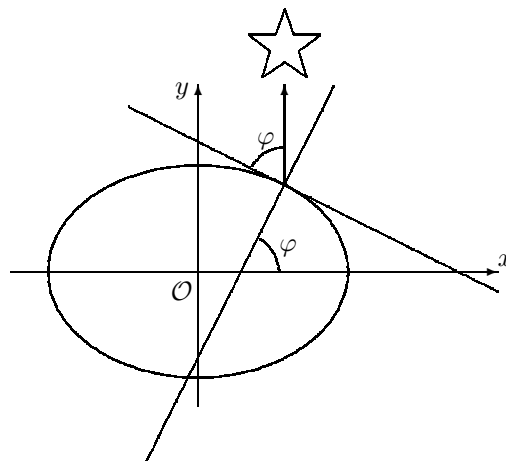


FIGURA III.1.1. Definição de *latitude elipsóidica*.

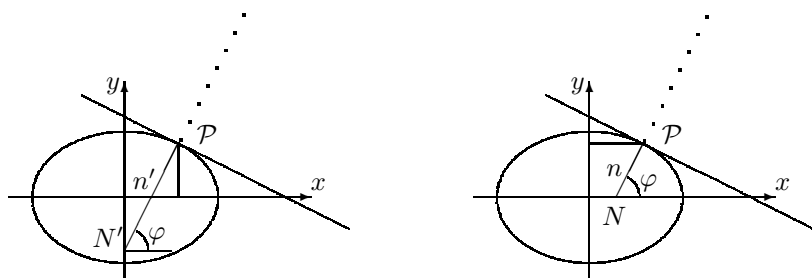


FIGURA III.1.2. Abcissa e ordenada da Elipse em função da latitude elipsóidica

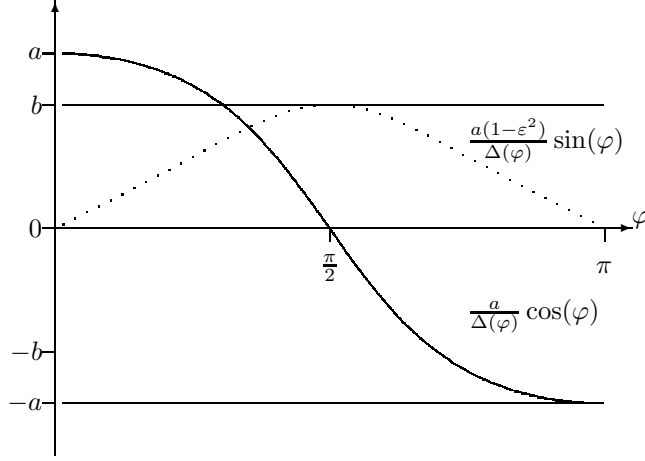
à Elipse é facilmente observável com um fio de prumo. Os ângulos assinalados têm lados perpendiculares dois a dois¹.

As coordenadas cartesianas da Elipse *em função da latitude elipsóidica* deduzem-se das expressões da *normal* e da *normal prolongada* (Figura III.1.2) e são (conf. II.7.1 e II.7.2):

$$(III.1.1) \quad \begin{cases} x = n' \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi = \frac{a}{\Delta(\varphi)} \cos \varphi \\ y = n \sin \varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\Delta(\varphi)} \sin \varphi \end{cases}$$

Estas funções lembram o seno e o cosseno trigonométricos (Figura III.1.3), mas podem afastar-se bastante delas se a excentricidade fôr apreciável.

¹O ângulo formado pela direcção da *Estrela Polar* com a *Direcção Zenital*, indicada pelo Fio de Prumo, é o mais fácil de medir. O resultado é o ângulo complementar da Latitude, ou *co-latitude*.


 FIGURA III.1.3. Funções $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$ em $[0, \pi]$

III.2. Primeira derivada da abscissa em ordem à latitude elipsóidica

(III.2.1)

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{a \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= a (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cos \varphi \\
 x' &= \left[a (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cos \varphi \right]' \\
 &= a \left[(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \right]' \cos \varphi + a (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (\cos \varphi)' \\
 &= a \left(-\frac{1}{2} \right) (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} (-\varepsilon^2 \cdot 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \cos \varphi + \\
 &\quad + a (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (-\sin \varphi) \\
 &= \frac{a \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{a \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} [\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)] \\
 &= \frac{a \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} (\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) \\
 &= \frac{a \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} [\varepsilon^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 1] \\
 &= \frac{a(\varepsilon^2 - 1) \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\Delta^3} \\
 &= -\frac{y}{\Delta^2}
 \end{aligned}$$

III.3. Primeira derivada da ordenada em ordem à latitude elipsóidica

Partindo da equação reduzida da Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obtem-se, desembaraçando de denominadores:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

O coeficiente de x^2 pode também ser expresso em a :

$$a^2(1 - \varepsilon^2)x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = b^2 = C^{te}$$

$$\frac{d}{d\varphi} [(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2] = 0$$

$$(1 - \varepsilon^2)2xx' + 2yy' = 0$$

substituindo agora a derivada já encontrada (conf III.2.1):

$$(1 - \varepsilon^2)2x \left(-\frac{y}{\Delta^2}\right) + 2yy' = 0$$

$$-2\frac{(1 - \varepsilon^2)}{\Delta^2}xy + 2yy' = 0$$

$$(III.3.1) \quad y' = \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\Delta^2}x = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cos \varphi$$

III.4. Declive da tangente em função da latitude elipsóidica

$$(III.4.1) \quad m = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{y'}{x'} = -(1 - \varepsilon^2) \frac{x}{y} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\cot \varphi$$

Note-se que o raio polar da tangente tem por declive $\tan \varphi$ e a própria tangente, por ser perpendicular ao seu raio polar, deveria ter como declive o valor simétrico do recíproco, que foi o que se determinou. Ou seja, o declive da tangente à Elipse, expressa em termos da latitude elipsóidica, tem a mesma forma que o declive da tangente à circunferência expressa em função do seu ângulo polar.

Se o andamento de $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$ já se afastava sensivelmente do das suas congêneres trigonométricas, o andamento das derivadas $\frac{dx}{d\varphi}$ e $\frac{dy}{d\varphi}$, como se pode apreciar pela *Figura III.4.1*, afasta-se ainda mais. Por isso, pode parecer surpreendente que o quociente das derivadas $\frac{y'}{x'}$ produza o mesmo resultado que o que teria sido encontrado se todo o estudo tivesse abordado a circunferência em vez da Elipse. Se, porém, nos fixarmos no significado geométrico das grandezas em jogo (*Figura III.4.2*), a surpresa desaparece.

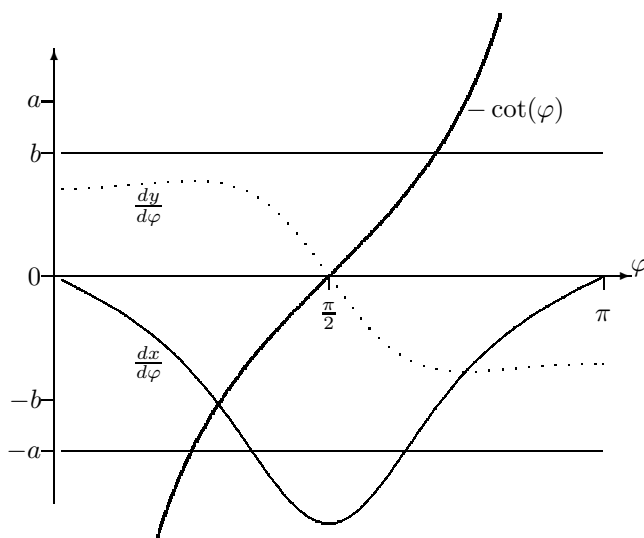


FIGURA III.4.1. Funções $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ e $\frac{y'}{x'}$ em $[0, \pi]$

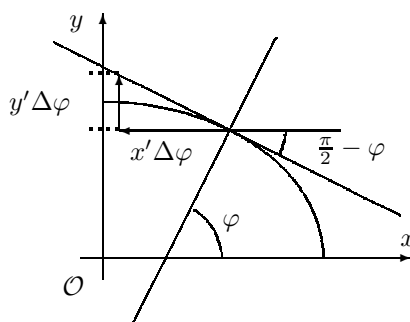


FIGURA III.4.2. Declive da tangente

III.5. Segunda derivada da abscissa em função da latitude elipsóidica

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{y}{\Delta^2} \right)$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} (-y\Delta^{-2}) = -y'\Delta^{-2} - y(-2)\Delta^{-3}\Delta'$$

A derivada y' já foi determinada (III.2.1), e a derivada da *amplitude delta* é:

$$(III.5.1) \quad \Delta' = \left[(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \right]' = -\frac{\varepsilon^2}{\Delta} \sin \varphi \cos \varphi$$

Considerando também as expressões x e de y' (*conf. III.1.1 e III.3.1*):

$$(III.5.2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\varphi^2} &= - (1 - \varepsilon^2) \frac{x}{\Delta^4} + \frac{2y}{\Delta^3} \left(-\frac{\varepsilon^2}{\Delta} \sin \varphi \cos \varphi \right) \\ &= - (1 - \varepsilon^2) \frac{x}{\Delta^4} - \frac{2y}{\Delta^4} \varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{1}{\Delta^4} \left[-2\varepsilon^2 y \sin \varphi \cos \varphi - (1 - \varepsilon^2) x \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^4} \left[-\frac{1}{\Delta} 2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot a (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi - \frac{1}{\Delta} a (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \right] \\ &= -\frac{1}{\Delta^5} \left[a (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \right] (2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1) \\ &= -\frac{y'}{\Delta^2} (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

III.6. Segunda derivada da ordenada em ordem à latitude elipsóidica

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\varphi^2} &= \frac{d}{d\varphi} \frac{dy}{d\varphi} \\ &= \frac{d}{d\varphi} [(1 - \varepsilon^2) x \Delta^{-2}] \\ &= (1 - \varepsilon^2) (x \Delta^{-2})' \\ &= (1 - \varepsilon^2) [x' \Delta^{-2} + x (\Delta^{-2})'] \\ &= (1 - \varepsilon^2) [-y \Delta^{-2} \Delta^2 + x (-2) \Delta^{-3} \Delta'] \end{aligned}$$

Usando sucessivamente as relações III.5.1, III.1.1 e III.2.1:

$$(III.6.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2y}{d\varphi^2} &= (1 - \varepsilon^2) [-y \Delta^{-4} - 2x \Delta^{-3} (-\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \Delta^{-1})] \\ &= \frac{1}{\Delta^4} (1 - \varepsilon^2) (2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot x - y) \\ &= \frac{1}{\Delta^4} (1 - \varepsilon^2) \left(\frac{2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot a \cos \varphi}{\Delta} - \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\Delta} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta^5} a (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] \\ &= -\frac{x'}{\Delta^2} [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] \end{aligned}$$

III.7. Raio de curvatura da Elipse em função da latitude elipsóidica

O *raio de curvatura* de uma função definida de forma paramétrica obedece à expressão geral (*conf II.8.3*):

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

que será agora aplicada à Elipse expressa em função da latitude elipsóidica.

$$M(\varphi) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' \left\{ -\frac{x'}{\Delta^2} [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] \right\} - y' \left(-\frac{y'}{\Delta^2} \right) (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} =$$

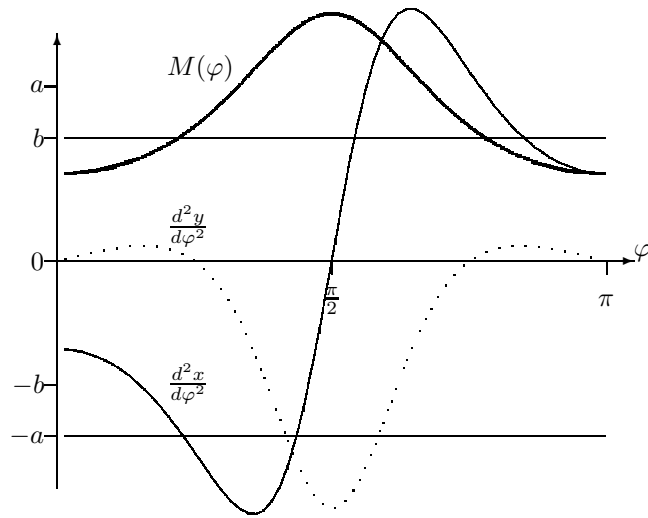
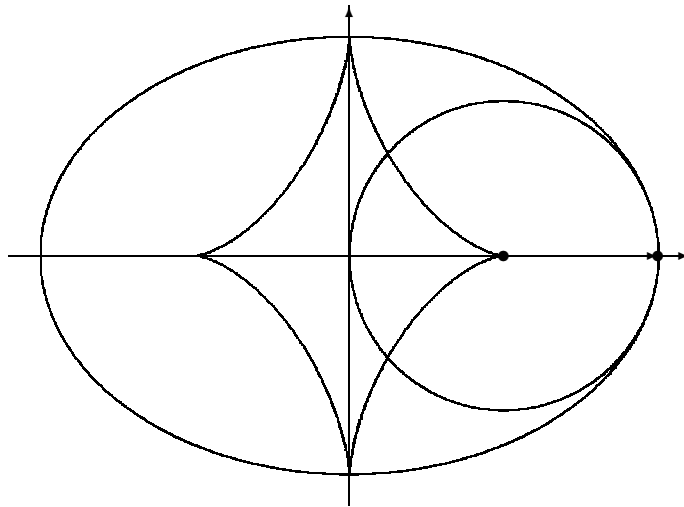
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Delta^2 (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{-x'^2 [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] + y'^2 (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} = \\
 &= \frac{\Delta^2 \left[\frac{y^2}{\Delta^4} + \frac{(1-\varepsilon^2)^2 x^2}{\Delta^4} \right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{y^2}{\Delta^4} [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] + \frac{(1-\varepsilon^2)^2 x^2}{\Delta^4} (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\Delta^4} [y^2 + (1 - \varepsilon^2)^2 x^2]}{\frac{1}{\Delta^4} \{ (1 - \varepsilon^2)^2 x^2 (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi) - y^2 [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)] \}} = \\
 &= \frac{\left[\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2 \sin^2 \varphi}{\Delta^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)^2 a^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^2} \right]}{(1 - \varepsilon^2)^2 \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^2} (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi) - \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2 \sin^2 \varphi}{\Delta^2} [2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - (1 - \varepsilon^2)]} = \\
 &= \frac{\left[\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)^2 a^2 \sin^2 \varphi}{\Delta^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{\Delta^2} [\cos^2 \varphi (1 + 2\varepsilon^2 \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi (2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1 + \varepsilon^2)]} = \\
 &= \frac{\left[\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{\Delta^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{\Delta^2} (\cos^2 \varphi + 2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2\varepsilon^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} = \\
 &= \frac{\frac{a^3(1-\varepsilon^2)^3}{\Delta^3}}{\frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{\Delta^2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\Delta (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)}
 \end{aligned}$$

Em conclusão (*conf. II.7.2*):

$$(III.7.1) \quad M(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\Delta^3(\varphi)} = n' \frac{1 - \varepsilon^2}{\Delta^2(\varphi)}$$

O andamento geral do *raio de curvatura* da Elipse em função da latitude elipsóidica pode ser observado na *Figura III.7.1*. É mínimo no Equador (*Figura III.7.2*) e máximo nos pólos (*Figura III.7.3*).

A *Figura III.7.4* compara os andamentos do *raio de curvatura* e da *normal prolongada*. E a *Figura III.7.5* mostra o lugar geométrico dos centros de curvatura da Elipse assim como o *círculo osculador* correspondente à latitude elipsóidica $\varphi = 45^\circ$.

FIGURA III.7.1. Função $M(\varphi)$ em $[0, \pi]$ FIGURA III.7.2. *Círculo osculador* de raio mínimo

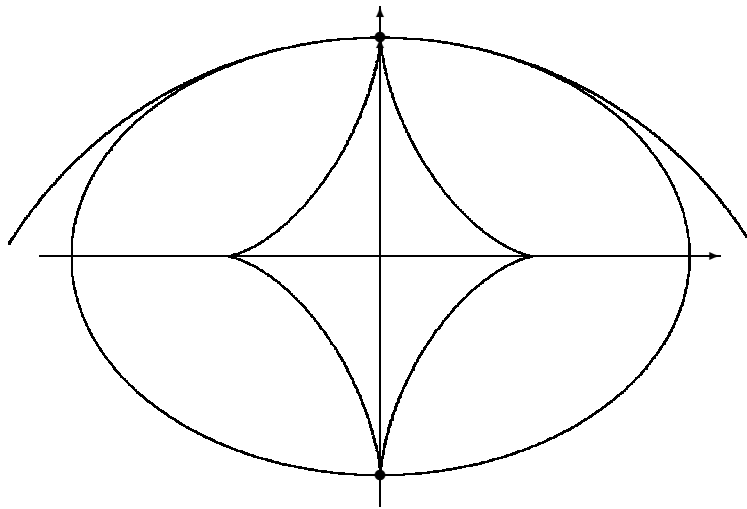


FIGURA III.7.3. *Círculo osculador* de raio máximo

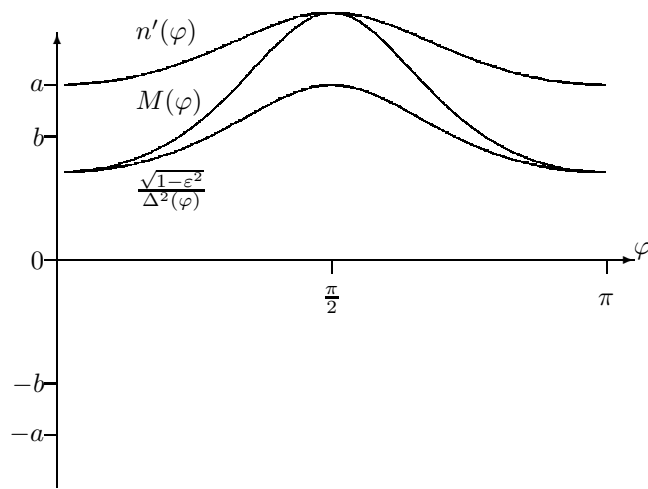


FIGURA III.7.4. Raio de curvatura $M(\varphi)$ e função $\Delta(\varphi)$ em $[0, \pi]$

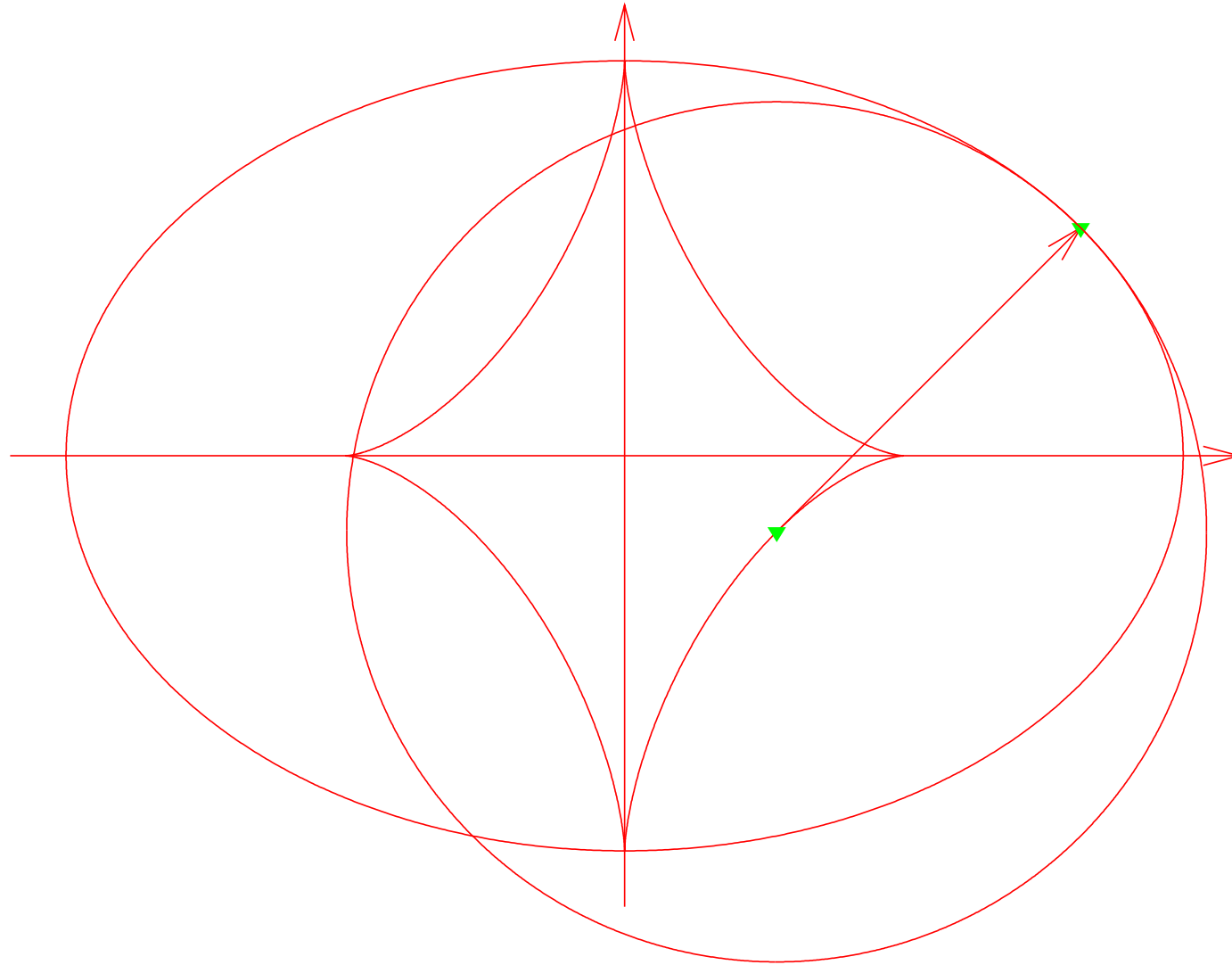


FIGURA III.7.5. Lugar geométrico dos *centros de curvatura*.

Bibliografia

- [1] A. W. Goodman. *Analytic Geometry and the Calculus*, chapter 10. The Macmillan Company, New York, 1963.
- [2] Arthur H. Robinson; Joel L. Morrison; Phillip C. Muercke; A. Jon Kimerling; Stephen C. Guptill. *Elements of Cartography*, chapter 4. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [3] G. Salmon. *Sections Coniques*, volume 1 of *Traité de Géométrie Analytique*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, Quai des Augustins 55, Paris, deuxième édition, 10 July 1884. Un exposé des méthodes les plus importantes de la géométrie et de l'Algèbre modernes.
- [4] Júlio Rey Pastor; Pedro Pi Caleja; César A. Trejo. *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables. Aplicaciones.*, volume 2 of *Análisis matemático*, paragraph XX.77, pages 324–324. Editorial KAPELUSZ, Moreno 372, Buenos Aires, séptima edición, 10 January 1969. Excelente abordagem da Projecção de Gauss-Kruger.

Índice

amplitude delta, 31, 42

círculo osculador, 43

Cardióide, 22

circunferência, tangente, 15

comprimento do arco, 34

curvatura, 34

diâmetro conjugado, 21

elipse, tangente, 17

equação da normal, 25

excentricidade, primeira, 22, 26, 31

excentricidade, segunda, 26

incremento elementar do arco, 34

latitude elipsóidica, 37

normal, 32, 38

normal à elipse, 28

normal prolongada, 28, 31, 38, 43

raio de curvatura, 35, 42, 43

semi-diâmetro, 22

semi-diâmetro conjugado, quadrado, 29

semi-diâmetros conjugados, soma dos quadrados, 23

semi-eixo menor, quadrado, 30

sub-normal, 27

sub-tangente, 27